कविवर्य गणकचक्रचूडामणि श्रीमत् भास्कराचार्य विरचित
'लीलावती' या अद्वितीय दुर्मिळ गणित-ग्रंथाचें
सुबोध व सटीक मराठी भाषांतर

लीलावती पुनर्दर्शन

[भास्कराचार्यांचें लघु चरित्र आणि सहा परिशिष्टें यासहित]

लेखक
प्राध्यापक ना. ह. फडके

एस.एल.सिंह

३.५.१९८९



भास्कराचार्य लीलावतीस गणित शिकवीत आहेत.



लेखकाचा जीवन–परिचय

नांव–नारायण हरी फडके

जन्म दिनांक – १ ऑक्टोबर १९०२

जन्म स्थान – नाशिक शहर

प्राथमिक शिक्षण – नाशिक येथे व्हर्न्याक्युलर फायनल पर्यंत

माध्यमिक शिक्षण – नाशिक हायस्कूल आणि प्रताप हायस्कूल, अमळनेर

मॅट्रिक उत्तीर्ण – १९२४ मे, प्रताप हायस्कूलचें संस्कृत पारितोषिक

महाविद्यालयीन शिक्षण – फर्ग्युसन कॉलेज, पुणे १९२४ ते १९३०.

पदव्या – बी. ए. प्रथम श्रेणी १९२८ मुंबई विद्यापीठ गणित (उच्चस्तर); एम्. ए. प्रथम श्रेणी, १९३०, मुंबई विद्यापीठ अयुक्त गणित.

नोकरी – महाराष्ट्र सरकारच्या शाळा आणि महाविद्यालये, १९३१–१९५७ ; खाजगी महाविद्यालयें १९५७–१९६५ यांत गणिताचे मुख्य प्राध्यापक.

लेखन – महाविद्यालयीन गणित अभ्यासक्रमास अनुसरून प्रथम व द्वितीय वर्षासाठी

(अ) ७ क्रमिक पुस्तकें (इंग्रजींतून)

(ब) भारतीय गणिती (मराठींतून) १९५२

(क) लीलावती पुनर्दर्शन (मराठींतून) १९७१

(ड) विश्वकोशाचे एक लेखक, विषय गणित व ज्योतिःशास्त्र

(ई) सृष्टिज्ञान मासिकांत अनेक लेख. याशिवाय मराठी विज्ञान परिषदेच्या कार्यकारी मंडळाचे व महाराष्ट्र शासनाने नियुक्त केलेल्या एकरूप परिभाषा समितीच्या गणित उपसमितीचे सभासद.

आजीव सभासद – मुंबई मराठी साहित्य संघ, शिवाजी पार्क जिमखाना, मुंबई मराठी ग्रंथसंग्रहालय, डेक्कन एज्युकेशन सोसायटीचे फेलो, जनरल एज्युकेशन इन्स्टिटयूटच्या बोर्ड ऑफ डायरेक्टर्सचे सभासद वगैरे.

आवडी व छंद – खगोलशास्त्र, गणिती कोडीं

खेळ – ब्रिज, टेनिस, बिलियर्डस, पोहणे.

पत्ता – प्रजापति भुवन, गोखले रोड नॉर्थ, दादर मुंबई २८.

कविवर्य गणकचक्रचूडामणि श्रीमत् भास्कराचार्य विरचित
'लीलावती' या अद्वितीय दुर्मिळ गणित-ग्रंथाचें
सुबोध व सटीक मराठी भाषांतर

लीलावती पुनर्दर्शन

[भास्कराचार्यांचें लघु चरित्र आणि सहा परिशिष्टें यासहित]

लेखक

प्राध्यापक ना. ह. फडके

★

प्रथमावृत्ति

१९७१

प्रकाशक :

प्रा. ना. ह. फडके
प्रजापती भुवन, गोखले रोड,
दादर, मुंबई २८.

जुलै १९७१

मूल्य : रुपये पंधरा

मुद्रक :

दि. दा. गांगल
लोकसंग्रह कारखाना,
१७८६ सदाशिव, पुणें ३०.

अर्पणपत्रिका

ये देववाणीमभिकामयन्ते ।
येषां रतिर्वै गणिते प्रणीते ॥
तेभ्यो मनोबुद्धिविलासनार्थम् ।
लीलावती-दर्शनमर्पयामि ॥

अनुवादक

या पुस्तकाच्या निर्मितीसाठीं शासनाच्या 'साहित्य संस्कृति' मंडळानें रुपये ६०००/- अनुदान दिलें याबद्दल लेखक, महाराष्ट्र-राज्य साहित्य व संस्कृति मंडळ यांचा अत्यंत आभारी व ऋणी आहे.

विषयानुक्रमणिका

चित्रानुक्रमणिका

प्रस्तावना

भास्कराचार्य आणि लीलावती हीं दोन्हीं नांवें आबालवृद्धांच्या परिचयाचीं आहेत. एखादा विद्यार्थी जर गणितांत विशेष चमकू लागला तर त्याचे शाळेंतील मास्तर कौतुकानें त्याला 'प्रतिभास्कराचार्य' असेंही म्हणतात. लीलावतीसंबंधी तर अनेक आख्यायिका प्रचलित आहेत. भास्कराचार्यांच्याबद्दल व त्यांनीं लिहिलेल्या ग्रंथांबद्दल, विशेषतः लीलावती ह्या ग्रंथाबद्दल, भारतीयांना विशेष कुतूहल असावें हें साहजिकच आहे. भास्कराचार्यांचा जन्म महाराष्ट्रांतला. लीलावतीवर अनेक टीकाग्रंथ व भाषांतरें उपलब्ध आहेत पण ह्या विषयावर सांगोपांग विवेचन करून अलीकडे – म्हणजे विसाव्या शतकांत – लिहिलेला असा ग्रंथ मराठींत सांपडत नाही. दीर्घ परिश्रम करून प्रा. ना. ह. फडके यांनी 'लीलावती पुनर्दर्शन' हा ग्रंथ तयार केलेला आहे आणि त्यासंबंधीं भासत असलेली एक मोठी उणीव अशा रीतीनें दूर झाली आहे.

जवळ जवळ अठरा वर्षांपूर्वीं प्रा. फडके यांनींच 'भारतीय गणिती' या नांवाचें एक छोटेसें पुस्तक लिहिलें होतें. त्यांत बऱ्याच विस्तृत प्रमाणांत भास्कराचार्य व लीलावती यांसंबंधी प्रमाणभूत व मनोरंजक माहिती मिळते. ज्या वाचकांनीं तें पुस्तक वाचलें आहे त्यांच्या मनांत ह्या नवीन पुस्तकाबद्दल विशेष उत्सुकता उत्पन्न होईल यांत शंका नाहीं.

लीलावती हा ग्रंथ 'हसत खेळत अंकगणित' ह्या स्वरूपाचा दिसतो. त्याचें हें स्वरूप 'लीलावती पुनर्दर्शनां'त कायम ठेवण्याची जबाबदारी प्रा. फडके यांनीं उत्तम तऱ्हेनें पार पाडलेली दिसते. ह्या विषयावरील अनेक संस्कृत, हिंदी, इंग्रजी व मराठी ग्रंथांचें वाचन करून प्रस्तुत ग्रंथ लिहिला गेला असल्यामुळें प्रत्येक पानावर पांडित्यप्रदर्शक टीपा प्रस्तुत ग्रंथकर्त्याला देता आल्या असत्या. परंतु त्या मोहाला बळी न पडतां त्यांनीं आवश्यक ती पूरक माहिती, शेवटी, सहा परिशिष्टांमधून दिलेली आहे. त्यामुळें पुस्तक वाचतांना व्यत्यय येत नाहीं व 'लीलावती' लीलागम्य आहे असेंच वाचकांस वाटते.

लीलावती हें बाराव्या शतकांत लिहिलेलें अंकगणिताचें पुस्तक. पाठ्यपुस्तक म्हणून त्याचा उपयोग अनेक शतकें आपल्या देशांत होत होता. अजूनही कांहीं प्रांतांत पाठशाळांतून हें पुस्तक शिकवलें जातें असें कळतें. त्यांतील रीती सोप्या वाटत असत व उदाहरणांतून मनोरंजक माहिती मिळत असे. येथें माझा स्वतःचाच एक अनुभव सांगतो.

महाराष्ट्रीयांच्या संध्येंत विष्णूचीं चोवीस नांवें सुरुवातीला घेतली जातात. उत्तरेकडील पंडितांची संध्या थोडी निराळी असते व त्या संध्येंत चोवीसाऐवजी कमी नांवें असतात. बनारस हिंदू युनिव्हर्सिटीमध्यें प्राध्यापकाचें काम करीत असतांना मी अनेक पंडितांना संध्येंतील चोवीस नांवांचें रहस्य काय या संबधीं विचारलें होतें. समाधानकारक उत्तर

कोणाकडूनच मिळालें नाहीं. 'अखेर कॉलेज ऑफ इण्डॉलॉजी' मधील प्राध्यापक स्व. वासुदेव शरण अग्रवाल यांनीं मात्र 'चोवीस' या संख्येचें रहस्य समजावून सांगितलें. त्यांनीं जी माहिती दिली तीच प्रस्तुत ग्रंथांत १८६ पृष्ठावरील श्लोक २५२ याचें स्पष्टीकरण करतांना प्रा. फडक्यांनीं दिली आहे. विष्णूच्या चार हातांत शंख, चक्र, गदा व पद्म ही ४ × ३ × २ × १ = २४ प्रकारांनी ठेवता येतात. अशा रीतीनें विष्णूच्या चोवीस अलग अलग मूर्ति होतात. त्यांचीच तीं चोवीस नावें. तसेंच शिवाच्या दहा हातांत दहा आयुधें १० ! = ३६,२८,८०० प्रकारांनीं ठेवता येतात. मात्र शंकराची इतकीं भिन्न नावें आपल्या जुन्या साहित्यांत कोठें लिहून ठेवलेलीं आढळत नाहींत.

ग्रंथामधील श्लोकांतून ठिकठिकाणीं जीं संबोधनें वापरलीं आहेत तिकडेही वाचकांचें लक्ष जातें. कोठे 'अये बाले लीलावती मतिमति' (हे बुद्धिमान मुली लीलावती) तर कोठे 'सखे' (हे मित्रा) असे संबोधन आढळते. 'कान्ते', 'मृगाक्षि', 'चंचलाक्षि बाले' इत्यादि संबोधनेंही आढळतात. यावरून भास्कराचार्यांनीं चालविलेल्या 'हसत खेळत अंकगणिता' च्या वर्गांत कोण कोण शिकत असत याबद्दल विद्वान संशोधक तऱ्हेतऱ्हेचे तर्क काढत असतील. पण येवढें मात्र खरें कीं शिक्षणाची सुरुवात आनंदानें व प्रगति कुतूहलानें होते (learning begins with joy and flourishes in wonder) याचा प्रत्यय पुस्तकाच्या वाचकाला येतो. पृष्ठ ४८ वरील श्लोक ७३ ची शेवटची ओळ आहे —

" जानीहि पाटचां पटुताऽस्ति ते चेत् ॥ "

(जर तुला पाटीगणित उत्तम येत असेल तर ती संख्या सांग). एखाद्या छानदार उदाहरणाच्या शेवटीं अशा तऱ्हेचें आव्हान पाहून वाचकास वाटूं लागतें कीं भास्कराचार्यांच्या 'क्लासांत' जर आपल्याला प्रवेश मिळाला असता तर काय गंमत झाली असती !

पृष्ठ ७५ वर खालील उदाहरण दिलेलें आहे :—

" गोड, कडू, तुरट, आंबट, खारट व तिखट यांपैकीं १, २, ३, ४, ५, ६ रस एकत्र करून चटण्यांचे प्रकार किती होतील तें, हे गणका, सांग ".

चटण्यांचीं प्रात्यक्षिकें मुलांमुलींनीं आपआपल्या घरीं केलीं, करवलीं किंवा नाहींत कोणास ठाऊक ! पण 'रसदार अंकगणिताचा' अनुभव ह्या पुस्तकाच्या वाचकांना पदोपदीं येतो.

लीलावती हें इतकें प्राचीन अंकगणित ! आज आपणांला कितीतरी अधिक उपयोगी नियम व सिद्धांत माहीत असले पाहिजेत. ह्या बाबतींत प्रा. फडके यांनीं बरीच जागरूकता दाखविलेली दिसते. श्लोक १६४ चें स्पष्टीकरण करीत असतांना पृष्ठ ११० वर आकृति १३ देऊन प्रा. फडके (१) कोज्या ट = ० आणि (२) कोज्या ट ≠ ० या दोन्ही बाबतींत योग्य तो खुलासा करतात. जी गोष्ट भास्कराचार्यांच्या वेळीं माहीत नव्हती परंतु जी आज एखाद्या हुशार शाळकरी विद्यार्थ्याला माहीत असेल त्याचें हें उदाहरण. यात आश्चर्य वाटण्याचें कारण नाही. न्यूटनला माहीत नव्हत्या अशा अनेक गोष्टी बी.ए. – बी. एस्‌सी. (गणिताच्या) विद्यार्थ्यांना माहीत असाव्या लागतात. नाहींतर ते आपली परीक्षा पास कसे होणार ?

संस्कृत व गणित या दोन्ही विषयांत ज्यांना रुचि आहे त्यांच्याकरिता हें पुस्तक म्हणजे सुरस, सचित्र संख्यामिश्रित कथासंग्रहच आहे. परंतु केवळ सांस्कृतिक किंवा साहित्यिक बुद्धिविलास म्हणूनच 'लीलावती पुनर्दर्शना' कडे पाहाणें ठीक दिसत नाहीं. गणिताच्या इतिहासाच्या पार्श्वभूमीवर 'लीलावती'चें स्थान पाहिल्यास भास्कराचार्यांच्या थोर बुद्धिमत्तेची ओळख पटते. ते स्वतः उत्तम गणिती असून उत्तम शिक्षकही होते असें दिसतें. प्लेटो आपल्या 'रिपब्लिक' नांवाच्या ग्रंथात म्हणतो :

"Arithmetic has a very great and elevating effect, compelling the soul to reason about abstract number, and if visible or tangible objects are intruding upon the argument, refusing to be satisfied"

वरील उक्तींत जर कांहीं तथ्य असेल तर, सरस उदाहरणें, खुबीदार काव्य आणि जुन्या जमान्यांतील आकर्षक व्यवहारचित्रें यांनी भांबावून न जातां एखादें बालमन लीलावती-दर्शनानें भारावून जाईल व त्यांतून एखाद्या नव्या भास्कराचार्यांचा जन्म होईल.

गणिताच्या इतिहासांत असे चमत्कार आढळतात. वॉलपेपर म्हणून भिंतीवर लावलेल्या गणिताच्या एका जुनाट पुस्तकाच्या पानांतून प्रेरणा घेऊन एक छोटी मुलगी मादाम कोवालेव्स्की (Madame Kowalewski) या नांवानें, गणिती म्हणून पुढे प्रसिद्धीला आली. 'लीलावती पुनर्दर्शना'नें प्रभावित होऊन जर एखादी 'लीलावती' आजच्या नव्या गणितांत संशोधनकर्ती म्हणून नांवारूपाला आली तर आश्चर्य वाटण्याचें कारण नाहीं.

'लीलावती पुनर्दर्शना'चें महत्त्वपूर्ण कार्य यशस्वी रीतीनें पार पाडल्याबद्दल मी प्रा. फडके यांचें अभिनंदन करतों.

पुणें विद्यापीठ
२३-५-७१

वि. वा. नारळीकर
पुणें विद्यापीठांतील
व्यावहारिक गणिताचे
लोकमान्य टिळक प्राध्यापक

लेखकाचें निवेदन

श्रीमद्‌गणकचक्रचूडामणि कविवर्य भास्कराचार्य यांच्या सुप्रसिद्ध पण दुर्मिळ अशा 'लीलावती' या अतुलनीय गणितग्रंथाचें सोपपत्तिक मराठी भाषांतर वाचकांपुढें ठेवतांना मला अतिशय आनंद होत आहे. संस्कृतांतील कादंबऱ्या, नाटकें, काव्यें इत्यादि अनेक ललित ग्रंथांचीं मराठींत किंवा अन्य भारतीय भाषांत भाषांतरें झालीं. इतकेंच नव्हें, त्यांच्यापैकीं कांहीं ग्रंथांनीं पाश्चात्य ललित लेखकांना वेड लावलें हें खरें, तथापि संस्कृत शास्त्रीय ग्रंथांनी जनमनाचा इतका जोरकस ठाव घेतल्याचें दिसत नाहीं. असें असतांनाही ज्या ग्रंथाचा बोलबाला भारतांत आसेतुहिमाचल झाला व अनेक पाश्चात्य विद्वानांना ज्यानें मोहविलें तो भास्कराचार्यांचा 'सिद्धांतशिरोमणि' हा ग्रंथ गणित व ज्योतिष या विषयांत अग्रगण्य समजला जातो. या ग्रंथाचे चार विभाग अनुक्रमें लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय व गोलाध्याय हे असून पहिला भाग जो 'लीलावती' त्याचें विवरण प्रस्तुत पुस्तकांत केलेलें आहे. भास्कराचार्य या ग्रंथास 'पाटीगणित' असें नांव देतो. पण त्यांत अंकगणित, बीजगणित, भूमिति (क्षेत्रव्यवहार), त्रिकोण-मिति इत्यादि अनेक विषयांचें आलोडन केलेलें आढळतें.

भास्कराचार्यानें हा ग्रंथ शके १०७२ म्हणजे सन ११५० या वर्षी लिहिला. अर्थात् ग्रंथाचा प्रथम विभाग 'लीलावती' हा जितका लोकप्रिय झाला तितके पुढील भाग झाले नाहीत. कारण लीलावतीतलें गणित हें प्राथमिक तयारीसाठींच असल्यानें संस्कृतज्ञ विद्यार्थ्यांस पेलण्यासारखे होतें. पुढील सर्व गणित 'ग्रहगतिनिर्णय' या विषयास अनुलक्षून असल्यानें सामान्य वाचकांस समजण्यापलीकडचे आहे. अर्थात् 'लीलावती'ची लोकप्रियता अजून टिकून आहे. या ग्रंथावर गेल्या ८०० वर्षांत अनेक टीका झाल्या. त्या विविध भाषांतून झाल्या. टीका याचा कुत्सित अर्थ येथें न घेतां स्पष्टीकरण, विवरण, मल्लिनाथी अशा अर्थानें तो शब्द घ्यावयाचा. पुस्तकाच्या शेवटी पहिल्या परिशिष्टांत अशा टीकाकारांची जवळ जवळ समग्र यादी दिली आहे. त्यावरून दिसून येईल की, ज्यांना संस्कृतचा गंधही नाही अशा लोकांनी, उदाहरणार्थ – फैजी, जेम्स टेलर, कोलब्रुक इत्यादि पाश्चिमात्यांनीही या ग्रंथाचा अभ्यास केला होता. संस्कृतांत टीका करणारे अनेक गणिती आसेतुहिमाचल होऊन गेले. त्यांत गणेश दैवज्ञ व नरसिंह हे प्रसिद्ध आहेत.

मराठींत या ग्रंथाची सटीक भाषांतरें पूर्वी फक्त दोनच झालेली आहेत. त्यांतलें पहिलें भाषांतर कै. देवराव उखाशेट साळी (एरंडोलकर) यांनी सन १८८९ त केलें. दुसरें भाषांतर कै. विनायक पांडुरंग शास्त्री खानापूरकर यांनी औंध संस्थानचे श्रीमंत राजे श्रीनिवासराव पंतप्रतिनिधि यांच्या आश्रयानें सन १८९७ साली प्रसिद्ध केलें.

एरंडोलकर साळी यांचें भाषांतर मराठीतलें पहिलेंच असूनही फार चांगलें उतरलें आहे. पण त्यांत उपपत्ति नसल्यानें गणितज्ञ वाचकांची तृषा त्यानें भागत नाहीं. कारण क्वचित् कोठे उपपत्ति असलीच तर ती त्रोटक आहे. खानापूरकरांच्या भाषांतरांत उपपत्ति पुष्कळ आहे. पण आजचा महाविद्यालयीन गणिताचा विद्यार्थी ती उपपत्ति समजूं शकत नाही. म्हणून नव-गणिताच्या मदतीनें संपूर्णपणें स्पष्टीकरण देऊन पुस्तक अद्ययावत करण्याचा लेखकानें प्रयत्न केला आहे.

शास्त्रीबुवांचें पुस्तकही आतां दुर्मिळ झालें आहे. एरंडोलकरांच्या पुस्तकाच्या प्रती कांही वाचनालयांत सांपडतील. त्यांचे नातू ठाण्याचे एंजिनीअर श्री. कहाडे यांच्याकडे दोन प्रती आहेत असे कळते. खानापूरकर शास्त्र्यांच्या भाषांतर व सटीक प्रती अजून क्वचित उपलब्ध होतात. पण एकंदरीत तेंही दुर्मिळच.

स्वतः भास्कराचार्यानें आपल्या सूत्रांच्या उपपत्ति कोठेंही दिल्या नाहीत. विद्यार्थी गणितज्ञ झाला की नाही, याची चांचणी तो सूत्र वापरूं शकतो, की नाही, यावर ठरत असे. किंबहुना सूत्रांचें स्पष्टीकरण देणें हें मान्यवर समजलें जात नसे. आर्यभट्ट ते भास्कराचार्य या ७०० वर्षांच्या काळांत शास्त्रीय ग्रंथ कवितारूपांत लिहिले जात व सिद्धांताचें स्पष्टीकरण किंवा प्रुफ (सिद्धता) देण्याच्या खटाटोपांत कोणीच पडत नसे. याला भास्कराचार्यही अपवाद नव्हता. भारतीय गणितशास्त्राचें त्यामुळें केवढें नुकसान झालें हें आतां समजून येऊं लागलें आहे.

आजच्या काळांत महाराष्ट्रांत शिक्षणाची वाढ सर्व स्तरांवर झपाट्यानें होत आहे. माध्यमिक शाळा, महाविद्यालयें, विश्वविद्यालयें, ग्रंथालयें यांचीही संख्या जोरांत वाढत आहे. पण यांतील विद्यार्थिवर्गास योग्य तें वाङमय पुरविलें जात नाही. आमचे विद्यार्थी चोरकथा व गुप्तचर कथा (Detective Tales) यांत मश्गुल आहेत. बुद्धीस चालना देणारे वाङमय त्यांना पेलत नाही. संस्कृत व इतर भाषांतील विचारकथा त्यांचेपुढें ठेवणें आवश्यक झालें आहे. तसेंच संस्कृतचा व्यासंग कमी होत असल्यानें त्या भाषेंतलें वाङमय मराठींत आणणें ही एक अपरिहार्य गरज झाली आहे. या दृष्टीनें, शिक्षक, विद्यार्थी गणिताचे अभ्यासू यांना लीलावतीसारखें पुस्तक विशेष उपयोगी होईल असें वाटल्यानें आम्ही हें धाडस केलें आहे.

हें पुस्तक वाचणाऱ्यांना कांही सूचना देणें आवश्यक वाटतें. या पुस्तकांत भास्कराचार्यांच्या श्लोकांना अनुक्रमांक दिला आहे. प्रथम श्लोक, त्याखालीं त्याचा अर्थ (शक्यतों भाषांतर) आणि त्यानंतर त्याचें मराठींत स्पष्टीकरण असा क्रम ठेवला आहे. श्लोकांत सूत्र असेल तर स्पष्टीकरणांत त्याची उपपत्ति, फोड किंवा सिद्धता दिली आहे. बऱ्याचशा पारिभाषिक शब्दांचे अर्थ श्लोकाच्या भाषांतराला लागूनच दिले आहेत. श्लोकांत उदाहरण असेल तर त्याचें सूत्राप्रमाणें किंवा अन्य रीतीनें उत्तर काढून दाखविलें आहे. पुष्कळ ठिकाणीं उपपत्ति देतांना, चलनकलन शास्त्र (Calculus), गणितीय उद्गमन (Mathematical Induction), वगैरे नवीन पद्धतीचा वापर केला

आहे. $\left(\frac{न}{र}\right)$ या चिन्हाचा nCr साठी वापर केला आहे. विकलनगुणकासाठी $\frac{d\,य}{d\,क्ष}$ हे चिन्ह कायम केलें आहे. कुट्टकाच्या रीती स्पष्ट करतांना सतत अपूर्णांकाचा (Continued Fractions) उपयोग केला आहे. पुष्कळ हिंदी भाषांतरें किंवा संस्कृत टीका यांत जो अवास्तव पाल्हाळ असतो तो काढून टाकून उत्तरनिष्कासन-क्रिया सोपी व सुटसुटीत केली आहे. पुस्तक इतकें काळजीपूर्वक छापलें गेलें आहे, तसेंच मुद्रणदोष काढून टाकण्यासाठीं इतकी मेहनत घेतली गेली आहे, की, पुस्तकांत बहुतेक कोठेंच मुद्रणदोष नाहींत; असले तरी अत्यल्प आहेत. तरीही शुद्धिपत्र जोडलेलें आहे.

परिशिष्टांत दिलेल्या शब्दांत ज्यांच्या मागे * ही खूण आहे ते शब्द लेखकानें बनविलेले आहेत. त्यांत महाराष्ट्र राज्यानें नियुक्त केलेल्या एकरूप परिभाषा समितीच्या 'गणित उपसमितीनें' बनविलेले अनेक प्रतिशब्द आलेले आहेत. इतर शब्द भास्कराचार्यांचेच आहेत.

भास्कराचार्यांची शैली निरनिराळ्या ठिकाणी त्याच्या कौशल्याचे अनेक पैलू दाखविते. गणित शिकवितांना, पौराणिक व धार्मिक ज्ञान, निसर्गवर्णन, व्यवहार इत्यादि गोष्टी तो लक्षपूर्वक शिकवितो. त्याकाळी ठाऊक असलेलें बहुतेक गणित लीलावतींत आलें आहे. या पुस्तकास महाराष्ट्र–शासनानें अनुदान दिल्यामुळें पुस्तक छापणें शक्य झालें, याबद्दल साहित्यसंस्कृति मंडळ व महाराष्ट्रशासन यांचा लेखक अत्यंत आभारी आहे.

या पुस्तकास पुणें विद्यापीठांतील व्यावहारिक गणिताचे लोकमान्य टिळक प्राध्यापक सुप्रसिद्ध वि. वा. नारळीकर यांनी वेळांत वेळ काढून समयोचित उत्कृष्ट प्रस्तावना लिहून दिली याबद्दल लेखक त्यांचा अत्यंत ऋणी आहे. हें पुस्तक समग्र वाचून त्यांनी त्यावर केलेलें भाष्य हें त्यांचें गणित विषयाचें सव्यसाचित्व दाखवितें. त्यांची प्रस्तावना मार्मिक व खुसखुशीत आहे. लेखक त्यांचा विशेष आभारी आहे.

या पुस्तकाचें बाळंतपण करण्याचें कठीण व क्लिष्ट काम प्राध्यापक गोपाळ रामचंद्र परांजपे यांनीं स्वेच्छेनें अंगावर घेतलें, आणि उपचारित (रुग्ण), उपचारक (भिषक्) व उपचारिका अशा तीनही प्रकारच्या भूमिका त्यांनी पार पाडल्या. तसे झालें नसतें तर या पुस्तकास आलेला सुबकपणा, गणिती भाग शुद्ध सुन्दर स्वरूपांत छापणें, विषयांचा अनुक्रम, सूचि वगैरे गोष्टींची नीट मांडणी होणें कठीणच होते. विज्ञान वाङ्मय बालबोध आणि आकर्षक करण्याच्या कामांतील त्यांचा प्रदीर्घ अनुभव लेखकास उपयोगी पडला. श्री. परांजपे यांनी एकादें काम आपलें म्हटलें, म्हणजे त्यासाठीं कितीही कष्ट पडोत, तें काम पूर्ण होईपर्यंत जिद्दीनें करीत राहाणें, हा त्यांचा स्वभाव-विशेष आहे. या वयांतही त्यांचा उत्साह दुर्दम्य आहे. म्हणून श्री. काकासाहेब परांजपे यांचें ऋण लेखकाचे शिरावर फार मोठें आहे. त्याची फेड तो करूंच शकणार नाहीं.

तसेंच श्री. चंद्रकांत हरि पाटील व श्री. गजानन आत्माराम गांगल आर्टिस्ट यांनी आकृत्या व चित्रें सुबक काढून दिल्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

लोकसंग्रह कारखान्याचे चालक श्री. दि. दा. गांगल व श्री. का. गं. सोनार यांचे आभार मानावेत तितके थोडेच आहे. या पुस्तकाच्या छपाईचा अवघडपणा पहातां, कारखान्यांतल्या कामगारवर्गानें धिमेपणानें छपाई पूर्ण केली हें त्यांना गौरवास्पद आहे. अनेक ठिकाणी संस्कृत अक्षरें बदलणें, गणिती पदावलि नीट मांडणें, अनुस्वार काढणें, घालणें, इत्यादि कामें त्यांनी केलीं, व श्री. सोनार यांनी अविचलितपणें कामाचा व्याप सांभाळला याबद्दल लेखक कारखान्याचा ऋणी आहे.

तसेंच सौ. मालिनीबाई परांजपे यांनीं श्री. काकासाहेबांना प्रुफें तपासण्याचें काम करण्यास आडकाठी केलीं नाही याबद्दल व संस्कृत श्लोकांची प्रुफें तपासली यासाठी लेखक त्यांचा आभारी आहे.

या आभार प्रदर्शनांत माझ्या पत्नी सौ. सुभद्राबाई फडके यांचेंही ऋण मान्य केलें पाहिजे. त्यांनी दिलेल्या उत्तेजनामुळेंच लेखक हें खर्चिक पुस्तक छापून प्रसिद्ध करण्यास पुढें झाला.

वाचकांना विनंति एवढीच की, त्यांनी हें पुस्तक नुसतेंच वाचूं नये. तें मननीय आहे आणि ग्रंथालयांत अवश्य पाहिजे असें आहे. पुस्तकांत अनेक चित्रें व आकृति घातल्या आहेत. पुस्तक लिहितांना कै. खानापूरकर शास्त्री यांचें पुस्तक व हरिप्रसाद भगीरथ यांचें हिंदी भाषांतर यांचा मला फार उपयोग झाला. त्यांचें ऋण मान्य केलेंच पाहिजे.

पुस्तकांतले संस्कृत श्लोक छापतांना पुष्कळ ठिकाणीं संस्कृत संधि तोडून लिहिले आहेत. ते छपाईच्या सौकर्यासाठीं तसेंच उच्चार सोपे व्हावेत म्हणून.

या पुस्तकांत आढळणारे मुद्रणदोष, त्रुटि, चुका, स्पष्टीकरणांतील चुका वाचकांनी लेखकांस कळविल्यास पुढील आवृत्तींत (यदा-कदाचित् छापली गेलीच तर) सुधारण्यांत येतील.

जून १९७१
प्रजापति भुवन,
गोखले रस्ता,
दादर, मुंबई २८.

नारायण हरि फडके

भास्कराचार्य : चरित्र व कार्य

कविवर्य गणकचक्रचूडामणि भास्कराचार्य (दुसरा) * याचें नांव माहीत नाहीं असा मनुष्य महाराष्ट्रांत तरी विरळा. त्यानें लिहिलेला 'सिद्धांतशिरोमणि' हा ग्रंथ प्रसिद्ध असून त्याचा पहिला भाग 'लीलावती' (पाटी-गणित) हा सर्व जगांत प्रसिद्ध झालेला ग्रंथ होय. 'लीलावती' ह्या काव्यमय नांवामुळें, तसेंच त्यांतल्या प्रश्नांमुळें, भास्कराचार्याचा कीर्तिदुंदुभि सर्व जगांत गेलीं सातशें वर्षें निनादत आहे. बाराव्या शतकाच्या अखेरीपर्यंत भारतीय गणितशास्त्र किती पुढारलें होतें हें लीलावतीवरून समजून येतें.

एकोणिसाव्या शतकाच्या मध्यास जर्मनींत 'वायरष्ट्रास्से' नांवाचा एक महान् गणिती होऊन गेला. तो म्हणतो, "उत्तम गणिती हा थोडाबहुत कवि असल्याशिवाय उच्च प्रकारचा गणिती होऊंच शकणार नाही.' पाश्चात्य गणितज्ञांत काव्यें करण्याची आवड असलेले अनेक गणिती आढळतात. सुप्रसिद्ध 'रुबाया' लिहिणारा, झाडाखालीं मदिरा आणि मदिराक्षी यांना घेऊन बसणारा, उमर खय्याम हा मूळचा गणिती. त्याचप्रमाणें भास्कराचार्यांच्या ठिकाणीं कवित्व व गणकत्व यांचें अप्रतिम साहचर्य होतें, हें पुस्तक वाचतांना वाचकांस याचा अनुभव येईलच.

भास्कराचार्य शके १०३६ (सन १११४) या वर्षी जन्मला. आपलें जन्मवर्ष त्याने गोलाध्याय या सिद्धांतशिरोमणीच्या चौथ्या भागांत स्पष्टपणें दिलेलें आढळतें. प्रश्नाध्यायाच्या ५८ व्या श्लोकांत तो म्हणतो,

रसगुणपूर्णमहीसमशकनृपसमये ऽ भवन्ममोत्पत्तिः ।
रसगुणवर्षेण मया सिद्धांतशिरोमणी रचितः ॥

याचा अर्थ : शकगणनेप्रमाणें माझा जन्म शके १०३६ त झाला व वयाच्या ३६ व्या वर्षी म्हणजे शके १०७२ त मी 'सिद्धांतशिरोमणि' हा ग्रंथ रचला. यावरून भास्कराचार्य सन १११४ त जन्मला व त्यानें सन ११५० त आपला सुप्रसिद्ध ग्रंथ लिहिला हें निश्चित होतें.

गोलाध्यायाच्या 'प्रश्नविचार' या प्रकरणाच्या अखेरीस भास्कराचार्यानें आपल्या कुळासंबंधीं थोडी माहिती दिलेली आहे. त्यावरून त्याचें गोत्र शांडिल्य होतें व तो विज्जलविड येथें राहात होता हें स्पष्ट होतें. खालील दुसऱ्या श्लोकांत तो आपल्या ग्रंथलेखनशक्तीबद्दल मोठ्या विश्वासानें म्हणतो,

आसीत्सह्यकुलाचलाश्रित - पुरे त्रैविद्यविद्वज्जने ।
नानासज्जनधाम्नि विज्जलविडे शाण्डिल्यगोत्रो द्विजः ॥

---

* पूर्वी एक भास्कराचार्य नांवाचा ज्योतिषी सहाव्या शतकांत होऊन गेला. त्याला पहिला भास्कराचार्य म्हणतात.

श्रौतस्मार्तविचारसारचतुरो निःशेषविद्यानिधिः ।
साधूनामवधिर्महेश्वरकृती दैवज्ञचूडामणिः ।।
तज्जस्तच्चरणारविंदयुगलप्राप्तप्रसादः सुधीः ।
मुग्धोद्बोधकरं विदग्धगणकप्रीतिप्रदं प्रस्फुटं ।।
एतद् व्यक्तसदुक्तियुक्तिबहुलं हेलावगम्यं विदाम् ।
सिद्धांतग्रथनं कुबुद्धिमथनं चक्रे कविर्भास्करः ।।

भास्कराचार्य सर्व शास्त्रें आपले वडील महेश्वर यांच्याजवळ शिकला. ते एक विद्वान् ज्योतिषी असून त्यांचा जन्म शके १००० च्या सुमारास झाला असावा असे कै. शं. बा. दीक्षित म्हणतात. त्यांचे 'करणग्रंथ' व 'जातक-टीकाग्रंथ' प्रसिद्ध आहेत. भास्कराचार्याचें शिक्षण अशा समर्थ गुरूच्याच जवळ झाल्यानें तो अनेक विद्यांत लवकरच पारंगत झाला.

विज्जलविड कोठें आहे ?

वरील पहिल्या श्लोकांत भास्कराचार्य म्हणतो कीं आपण विज्जलविड गांवचे राहाणारे. हें विज्जलविड गांव कोठें आहे याबद्दल निश्चित माहिती उपलब्ध नाहीं, विज्जलविड शब्दांतलीं शेवटलीं दोन अक्षरें अपभ्रष्ट होऊन बीड शब्द होतो, तेव्हां भास्कराचार्य बीड येथला राहाणारा होता असें पुष्कळांस वाटत होतें. पण मराठवाड्यांतले बीड हें अहमदनगरपासून ६४ किलोमीटर दूर आहे. तें सह्य पर्वताजवळ नाहीं. हल्लीं तेथें भास्कराचार्यांचे कोणी वंशजही नाहींत. हें विज्जलविड म्हणजे हैदराबाद जवळचें बेदर असावें असा निष्कर्ष कांहीं विद्वान् काढतात. कारण अकबर बादशाहाच्या पदरीं जो फैजी नांवाचा कवि होऊन गेला त्यानें इ. स. १५८७ त बादशहाच्या सांगण्यावरून लीलावतीचें पर्शिअन भाषेंत भाषांतर केलें होतें. त्यांत तो म्हणतो कीं भास्कराचार्य बेदरचा राहाणारा होता. पण बेदर सोलापूरच्या पूर्वेस ८० कि. मी. अंतरावर आहे. तेथें तर डोंगराचा एक सुळकाही नाहीं. अर्थात तें सह्य पर्वतापासून फार दूर आहे. म्हणून विज्जलविड म्हणजे बेदर नव्हे. भास्कराच्या काळीं बेदरजवळ कल्याण येथें चालुक्य वंशाचे राजे राज्य करीत असत. त्यांचा उल्लेख भास्कराच्या ग्रंथांत नाहीं आणि चालुक्यवंशीय राजांच्या इतिहासांतही कोठें भास्कराचार्यासंबंधीं उल्लेख नाही. मग विज्जलविड हें विजापूर असेल काय ? भास्कराचार्य हा कानडी ब्राह्मण असून वैष्णव संप्रदायी होता असें कांहीं लोक समजतात. पंडित सुधाकर द्विवेदी हे त्याला वैष्णवच मानतात. कारण गोलाध्यायाच्या 'भुवनकोश' प्रकरणांत तो बरेच उतारे विष्णुपुराणांतून देतो. पण विजापूर हें सह्य पर्वतापासून कमीतकमी १६० कि. मी. पूर्वेस आहे. तसेंच विजापूर हा शब्द विद्यापूर किंवा विजयपूर यांचा अपभ्रंश होण्याची जितकी शक्यता आहे, तितकी तो विज्जलविड यापासून होण्याची शक्यता नाहीं. यावरून विज्जलविड हें विजापूर नव्हें. तसेंच भास्कराचार्य कानडी ब्राह्मण नव्हता हें पुढें दिलेल्या माहितीवरून समजून

येईल. नृसिंहाची लीलावतीवरील 'वासनावार्तिक' नांवाची टीका आहे. तींत तो म्हणतो 'विज्जलविड निवासी पवित्रितदंडकारण्यः महाराष्ट्रानामाश्रयो महेश्वरनंदनः श्रीभास्कराचार्यः।' यावरून तो महाराष्ट्रीय ब्राह्मण होता हें निश्चित. मुनीश्वराची 'मरीचिका' नांवाची लीलावतीवर टीका आहे. तिच्यांत त्यानें विज्जलविड कोठें आहे याबद्दल पुढें दिलेलें वर्णन केलें आहें. तो म्हणतो, "सह्यकुलपर्वतान्तर्गत भूप्रदेशे महाराष्ट्रदेशान्तर्गतविदर्भापरपर्यायविराटदेशादपि निकटे गोदावर्यां नातिदूरे पंच क्रोशांतरे विज्जलविडम् ।

यावरून असें दिसतें कीं, विज्जलविड हें खानदेशांत किंवा नाशिक जिल्ह्यांत गोदावरीच्या उत्तरेस असावें. कोल्हापूरजवळ एक बीड आहे. तें सह्यपर्वतास जवळ असलें तरी गोदावरीच्या उत्तरेस नाहीं. मराठवाड्यांतलें बीड, बेदर, विजापूर हीं सह्य-पर्वताच्या ज्या अनेक रांगा आहेत त्यांतल्या कोठल्याच रांगेला जवळ नाहींत. मुनीश्वराची टीका शके १५३० मधली, म्हणजे 'शिरोमणि' रचनेनंतर सुमारें ५०० वर्षांनंतरची, आहे. त्याला भास्कराच्या स्थानासंबंधीं आपल्यापेक्षां जास्त विश्वासार्ह माहिती असणार असें धरून चाललें पाहिजे. त्याच्या म्हणण्याप्रमाणें विज्जलविड हें विदर्भाच्या अलीकडे व सह्यकुलापलीकडे अशा भूप्रदेशांत वसलेलें होतें. सह्याद्रीची मालेगांव रेंज व पितळखोरें टेंकड्या यांपासून हें गांव जवळ होतें, पण गोदावरीपासून पंचक्रोशींत होते. म्हणजे तें गोदावरीपासून ३२ ते ४८ कि. मी. अथवा एवढ्याच परिसरांत होते. हा गणिती तपशील चुकलेला आहे असें मानले तरी विज्जलविड हे मालेगांव, चाळीसगांव, जळगांव या भूभागांत असलें पाहिजे असें कै. डॉ. भाऊ दाजी तेलंग यांच्या संशोधनावरून दिसून येतें. चाळीसगांव पासून १६ किलोमीटरवरील पाटण हेंच पूर्वीचे विज्जलविड असावें असें दिसतें. कारण पाटणच्या सारजादेवीच्या (द्वारजा?) मंदिरांत दानपत्रासंबंधीचा शिलालेख त्यांना सांपडला. रॉयल एशियाटिक सोसायटीच्या मासिकाचीं पृष्ठें १७८–१८३ यांत यासंबंधीचे सर्व पुरावे त्यांनीं सादर केले आहेत. त्याप्रमाणें त्याकाळचे सूर्यवंशीय राजे कृष्णराज, इंद्रराज, गोवन व सूर्यदेव ह्या विद्वानांच्या चाहात्या राजांनीं मठ (विद्यालयें) चालविणाऱ्या गुरूंना दानें दिल्याचें त्यामध्यें उल्लेख आहेत. त्यांत चंगदेव (भास्कराचा नातू) याला शाळा चालविण्यासाठीं पाटण येथें कांहीं दानें दिलीं (परिशिष्ट ५ पहा), पण भास्कराचार्याचें विज्जलविड हेंच पाटण असा उल्लेख कोणत्याही टीकाकारानें केलेला नाहीं. गांवाचीं नांवें सहसा बदलत नाहींत. तेव्हां डॉ. भाऊ दाजी यांचा पुरावा ग्राह्य मानला तरी चंगदेवांचें गांव पाटण या पलीकडे, ताम्रपट व शिलालेख यावरून, निर्णय होत नाहीं. कदाचित् असें असेल कीं चंगदेव, अनंतदेव यांना सोइस्कर जागीं मठ बांधल्यानें शाळा चांगलीं चालवितां येईल असें वाटलें असेल, म्हणून मूळगांव विज्जलविड सोडून ते पाटण येथें स्थायिक झाले असावे. हें स्थानांतर कदाचित राजाज्ञेवरूनही त्यांना करावें लागलें असेल.

या लेखकाचें स्पष्ट मत असें आहे कीं, विज्जलविड गांव कोठें आहे याचा निर्णय अद्यापि लागावयाचा आहे. तथापि इतर पुराव्याअभावी डॉ. भाऊ दाजी यांचा निर्णय ग्राह्य मानणें अपरिहार्य भाग आहे.

भास्कराचार्य हयात असतां त्याची शाळा कोठें होती, तो कोणत्या राजाच्या पदरीं ज्योतिषी होता, त्याच्या मठाला कोणी अनुदानें व अग्रस्थानें (जमिनी) दिलीं यासंबंधीं कांहींच माहिती हातीं लागत नाहीं. यावरून तो कोणाचा आश्रित असावा असें दिसत नाहीं. त्याच्या वंशांतील नऊ पिढयांतील पुरुषांचीं नांवें मात्र त्रिविक्रम – भास्करभट्ट– गोविंद – प्रभाकर – मनोरथ – महेश्वर – भास्कर – लक्ष्मीधर – चंगदेव हीं ताम्रपटांत आढळतात.

भास्कराचार्याचें शिक्षण

भास्कराचार्य हा अत्यंत कुशाग्र बुद्धीचा विद्यार्थी असला पाहिजे, हें निराळें सांगण्याची गरज नाहीं. 'लीलावती' ग्रंथाच्या समाप्तीच्या श्लोकांत (श्लोक २६१) व जेथें भास्कराचार्य आपला कुलवृत्तांत देतो (गोलाध्याय, प्रश्नविचार ६१), या दोन्ही ठिकाणीं, त्याचें शिक्षण त्याच्या वडिलांजवळ झालें असें तो म्हणतो. बीजगणितांतल्या

आसीत् महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्याम् ।
आचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रपन्नः ।।
लब्धावबोधकलिकां तत एव चक्रे ।
तज्जेन बीजगणितं लघु भास्करेण ।।

या श्लोकावरून त्याचे वडील महेश्वर हे त्याचे गुरु होत. त्यांना विद्वान् मंडळींनीं आचार्य ही पदवी दिली होती. त्यांच्यापासून भास्करानें ज्ञानकलिका घेतली व त्यांच्यापाशींच त्यानें बीजगणिताचे पाठ घेऊन बीजगणित लिहिल्याचें तो सांगतो. काव्य, व्याकरण, गणित, ज्योतिष वगैरे विषयांचा त्याचा व्यासंग सर्वांग परिपूर्ण होता. पूर्वकाळीं आचार्य पदवी मिळविण्यास किती ग्रंथांचें अध्ययन करावे लागत असे हें २६१ व्या श्लोकावरून समजून येतें. गणेश दैवज्ञानें आपल्या टीकेंत त्याला गणकचक्रचूडामणि ही पदवी अर्पण केली आहे. गणित व ज्योतिष हे विषय शिकविण्यांत तो निष्णात होता. त्याकाळची विद्वान् मंडळी भास्कराचार्याच्या शिष्यांशीं वादविवाद करण्यास कचरत असत हें ताम्रपटांतील श्लोकांवरून दिसून येतें.

ग्रंथलेखन

भास्कराचार्यानें 'सिद्धांतशिरोमणि' हा ग्रंथ वयाच्या ३६ व्या वर्षीं लिहून पुरा केला. त्यांत ४ विभाग आहेत. १ लीलावती, २ बीजगणित, ३ गणिताध्याय व ४ गोलाध्याय. यांतला पहिला भाग 'लीलावती' हा मुख्यत्वेंकरून 'पाटीगणित' म्हणजे अंकगणितासंबंधीं आहे. तथापि त्यांत भूमिति, त्रिकोणमिति व (नवीन अभ्यासक्रमानुसार महाविद्यालयांतून शिकविल्या जाणाऱ्या) बीजगणितांतील अनेक प्रश्नांचा अंतर्भाव त्यानें केला आहे. याचें कारण त्या काळीं फलज्योतिषाचें प्राबल्य फार होतें. शिक्षित–अशिक्षित जनतेवर भविष्याचा पगडा फार मोठा होता, (आजही आहेच). म्हणून गणितज्योतिषाचा अभ्यास

प्रत्येक ज्योतिर्विदास आवश्यक असे. त्यासाठीं गणिताध्याय (ग्रहगतिगणित) व गोलाध्याय समजणें जरूरच होतें. त्याची पूर्वतयारी म्हणून 'लीलावती'ची योजना भास्कराचार्यानें केली. श्रीधराचार्याची 'त्रिशतिका' व महावीराचार्याचें 'गणितसारसंग्रह' या पुस्तकांतील उत्कृष्ट भाग घेऊन व त्यांत कांहीं नवीन प्रकरणें घालून 'लीलावती'ची रचना त्यानें केली. ज्योतिषशास्त्राचें पायाभूत असें सर्व गणित लीलावतींत आहे. अहर्गण, ग्रहभगण वगैरे जें गणित ग्रहगतींत लागतें त्याचा पाया म्हणून त्यानें कुट्टक-गणित लीलावतींत घातलें आहे. याला इंग्रजींत Diophantine equation म्हणतात.

ज्याप्रमाणें 'लीलावती' हा अंकगणितावरील उत्कृष्ट ग्रंथ आहे, त्याचप्रमाणें 'बीज-गणित' हें अव्यक्त गणितावरचें उत्कृष्ट पुस्तक आहे. या पुस्तकावरही अनेक टीकाग्रंथ झाले. जगांतील प्रमुख भाषांतून लीलावती व बीजगणित यांचीं भाषांतरे झालेलीं आढळतात. लीलावतीवरील टीका व भाषांतरें यांची यादी आम्ही (परिशिष्ट १ मध्यें) दिली आहे ती पहावी. बीजगणितावर कृष्णदैवज्ञाची 'नवांकुरा' म्हणून प्रसिद्ध टीका आहे. हा कृष्णदैवज्ञ जहांगीर बादशहाच्या पदरीं ज्योतिषी होता. त्याची टीका इ. स. १६१२ मधली आहे. बीजगणिताचें फारसी भाषांतर शहाजहानच्या कारकीर्दीत अताउल्ला रसीदी या ज्योतिषानें इ. स. १६३४ त केलें. स्ट्राची या इंग्रज लेखकानें १८१३ या सालीं इंग्रजी भाषांतर केलें. कै. खानापूरकर शास्त्री यांनीं १८९७ सालीं मराठींत भाषांतर केलें. पंडित सुधाकर द्विवेदी यांनीं १९२४ सालीं संस्कृत टीकेसह 'बीजगणित' प्रसिद्ध केलें. यांत मुख्यत्वेंकरून कुट्टक, वर्गप्रकृति, चक्रवालपद्धति या विषयांचा अंतर्भाव होतो.

गणिताध्याय व गोलाध्याय हे विषय त्या मानानें क्लिष्ट असल्यानें त्यांकडे पौर्वात्य वा पाश्चात्य विद्वानांचें लक्ष तितकें खेंचलें गेलें नाहीं. तथापि ज्योतिःशास्त्र (Mathematical Astronomy) या विषयाच्या सर्व अध्यापकांनीं व विद्यार्थ्यांनीं हे ग्रंथ वाचलेच पाहिजेत इतक्या महत्त्वाचे ते आहेत. पृथ्वी स्थिर आहे असें भास्कराचार्य गोलाध्यायांत म्हणतो. हें मत इ. स. १४०० पर्यंत युरोपांतही प्रचलित होतें. गणिताध्यायांत चंद्रसूर्यांच्या गति, भ्रमणें, ग्रहणें वगैरे गहन व क्लिष्ट विषय आलेले आहेत.

याशिवाय भास्कराचार्याचे अनेक ग्रंथ आहेत. ते म्हणजे 'करणकुतूहल', 'सर्वतोभद्रयंत्र' 'वसिष्ठतुल्य' व 'विवाहपटल' हे होत. या सर्व ग्रंथाच्या मूळ हस्तलिखित प्रती आज कुठेंच उपलब्ध नाहींत हें आमचें मोठेंच दुर्दैव आहे. भाग्याची गोष्ट ही की निदान त्यांच्या हस्त-लिखित नकला उपलब्ध आहेत. प्राचीन वस्तूंचें जतन कसें करावें ही कला आम्हां महा-राष्ट्रीयांना ठाऊक नाहीं. तथापि लीलावतोची सटीक हस्तलिखितें सुमारें २०० वर्षांपूर्वीची अजून उपलब्ध आहेत.

पराक्रमी भास्कराचार्य

वाचकांच्या लक्षांत येईलच की 'लीलावती' हा ग्रंथ म्हणजे एक अद्वितीय करामत आहे. त्याकाळच्या पद्धतीप्रमाणें ग्रंथ कविताबद्ध आहे. गणितासारखा रुक्ष विषय कवितारूपानें

सांगणें या सारखी भाषची अवघड कसरत दुसरी नाहीं. त्यांतही काव्यगुण आणणें आणखीनच अवघड. पण या सर्व अडचणींवर मात करून भास्कराचार्यानें आपली अलौकिक 'लीलावती' त्याकाळच्या विज्ञानी लोकांसमोर उभी केली. छापण्याची कला त्याकाळीं अस्तित्वांत असती तर या ग्रंथाची हजारावी आवृत्ति आतांपर्यंत निघाली असती. तथापि त्यामुळें 'सृजातिगुणवर्गविभूषित' लीलावतीचें कांहींच अडलें नाहीं. हस्तलिखित प्रतींच्या रूपानें तिचा प्रवास काश्मीर ते कन्याकुमारीपर्यंत झाला. इतकेंच नव्हे तर पाटीगणिताची इतर सर्व पुस्तकें लोप पावून त्यांची जागा लीलावतीनें घेतली. परदेशांत या ग्रंथाचा प्रसार जरा उशिरां म्हणजे १६ व्या शतकांत झाला. पण ज्यांनीं ज्यांनीं हा ग्रंथ प्रथम वाचला त्यांनीं त्यांनीं 'वा रे भास्कराचार्य' असेच उद्गार काढले. स्वत: भास्कराचार्यालाही ही आपली पहिली मानसकन्या अत्यंत प्रिय होती असें दिसतें. कारण कविकल्पनेच्या भराऱ्या लीलावतींत जितक्या आढळतात तितक्या इतर भागांत आढळत नाहींत.

कविवर भास्कराचार्य

भास्कराचार्याच्या संपूर्ण ग्रंथांत व्याकरणाच्या त्रुटि कोठेंही आढळत नाहींत. पाणिनि भास्कराचार्याच्या घरी पाणी भरीत होता असें म्हटलें तर त्यांत अतिशयोक्ति नाहीं. भास्कराचार्य प्राचीन कवीप्रमाणेंच अनुप्रासप्रेमी होता. लीलावतीतील खालील उदाहरणें पहा.

श्लोक १४९ : **वदैवं समानीय पानीयमानं ।।**

श्लोक १२० : **चयं त्रयं वयं विद्मो वदनं वद नंदन ।।**

श्लोक १२२ : **योजने यो जनेशः ।।**

श्लोक ९८ : **बाले मरालकुलमूलदलानि सप्त ।।**

श्लोक ६८ : **बाले बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसम् ।।**

एका उदाहरणांत भुंग्याचें वर्णन करतांना खालील उत्प्रेक्षा वापरली आहे.

श्लोक ६० : **कांते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रियाहूतः भृंगः ।।**

श्लोक ४१ : **दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिः ।।**

भास्कराचार्याला विनोदाचेंही वावडें नव्हतें. एका श्लोकांत एक शेटजी भिकाऱ्याला दान देतो त्याचा हिशेब विचारला आहे. त्याचें उत्तर एक कवडी असें आलें आहे. पण एवढ्यावरून भास्कराचार्याला आधुनिक साहित्यिक कवि म्हणावयास तयार नसतील, तर त्यांना वानगीदाखल गोलाध्यायांतले कांहीं श्लोक दाखवितो. गोलाध्यायांतला एक अध्याय ऋतुवर्णनास वाहिलेला आहे. त्यांतील कविता सरस आहेत. या ऋतुवर्णनाचें मराठी भाषांतर कै. बाळकृष्ण जनार्दन मोडक यांनीं बऱ्याच वर्षांपूर्वी केलें. तें पुस्तक २० वर्षांपूर्वी केसरीच्या वाचनालयांत मला पहावयास मिळालें. त्यांतील एक श्लोक उद्धृत करतों :—

सहस्यकाले बहुसस्यशालिनीम्।
चितामवश्यायकमौक्तिकोत्करै :।।
प्रहृष्टपुष्टाखिलगोकुलामिलाम्।
विलोक्य हृष्यन्त्यधिकं कृषीवला :।। (ऋतुवर्णन ९ गोलाध्याय)

अर्थ :–हेमंत ऋतूंत पृथ्वी भरल्या धान्यांनीं अधिकच शोभिवंत दिसते. या काळांत सकाळीं अवश्य येणारे जे दंवबिंदु (तेच जणूं मोतीं) त्यांच्या समूहानें तिच्या सौंदर्यांत आणखीनच भर पडते. आनंदी व धष्टपुष्ट अशी गाईबैलांच्या खिल्लारांनीं ही इला म्हणजे पृथ्वी शोभायमान दिसते व अशा सुंदर पृथ्वीस पाहून शेतकरी आनंदित होतात.

शैक्षणिक कौशल्य

लीलावतींतील श्लोकांतून भास्कराचार्यानें अनेक प्रकारचें कौशल्य दाखविलें आहे. धर्म वेद, पुराणें, महाकाव्यें यांची जातां जातां विद्यार्थ्यांना माहिती व्हावी हा उद्देश एक महत्त्वाचा उद्देश होय. 'पार्थं कर्णवधाय' हा श्लोक(७१) रथासंबंधीं सर्व माहिती देण्यास उपयुक्त आहे. अर्जुनाचा कर्ण हा भाऊ असला तरी प्रामुख्यानें वैरी होता, ही गोष्ट विद्यार्थ्यांच्या निदर्शनास आणली गेली आहे. पण याहीपेक्षां ह्या श्लोकांत प्रत्यक्ष लढाईचा देखावा वाचकांपुढें ठेवला आहे. कालिदासाच्या शाकुंतलांतील 'ग्रीवाभंगाभिरामम्' या श्लोकाशीं वरील श्लोकाची तुलना होऊं शकेल. हंसांच्या समूहाचें वर्णन किंवा हत्तींच्या कळपाचें वर्णन, भुंग्यांच्या कळपाची संख्या, पाळलेल्या मोराचें सापावर तुटून पडणें, कमळ वाऱ्याच्या झोतानें पाण्यांत बुडणें इत्यादि सर्व गोष्टी विद्यार्थ्यांस निसर्ग-सान्निध्यांत घेऊन जातात व विषय कंटाळवाणा होत नाहीं. भास्करानें कोठेंच सूत्रसिद्धि दिलेली नाहीं, याचें कारण हेंच असेल काय ? अर्थात् पूर्वींचे आचार्य सूत्रसिद्धि देत नव्हते. त्यांस ती आवश्यक वाटत नव्हती. भास्कराचार्यानें पूर्वसूरींच्या पावलावर पाऊल ठेवून सूत्रसिद्धि दिली नाहीं, पण उदाहरणें मात्र भरपूर दिलेलीं आहेत.

भास्कराचार्यांच्या कर्तबगारीचे आणखी कांहीं नमुने वाचकांपुढें ठेवणें इष्ट आहे. त्या काळच्या भारतीय ज्योतिर्वर्यांत तो अग्रस्थानीं होता म्हणून त्याला गणकचक्रचूडामणि अशी सार्थ पदवी मिळाली होती. ज्योत्पत्ति (determination of sines of angles) हा त्रिकोणमितीचा भाग त्यानें जितक्या कसबीपणानें हाताळला आहे तितका त्याच्या पूर्वींच्या गणितज्ञांनीं हाताळला नाहीं. भास्करानें पृथ्वी आपल्या स्थानीं स्थिर आहे अशी 'विश्वाची भूकेंद्रीय कल्पना' गृहीत धरली होती. अर्थात् ही कल्पना चुकीची होती. पण तीमुळें त्याच्या गणितांत कांहींच प्रमाद झाला नाहीं. कोपर्निकस व टायको ब्राहे यांचे पुष्कळसे शोध भास्कराचार्यास ठाऊक होते. न्यूटनच्या शून्यलब्धि शास्त्राची प्राथमिक कल्पना त्याला होती.

संस्कृतसारखी क्लिष्ट भाषा वाकवून त्यानें तिला गणितशास्त्राची संपूर्णपणें बटीक बनविली आहे. ललितशास्त्रांतले संकेत उपयोजून अनेक संख्यादर्शक शब्द त्यानें निर्माण

केले आहेत. पारिभाषिक शब्दांचें तर एक मोठें भांडारच त्यानें आपणापुढें खोललें आहे. मराठी भाषेंत इंग्रजी शास्त्रीय शब्दांस प्रतिशब्द हवे असतील तर ते भास्कराचार्यांच्या ग्रंथांत सहज मिळतील. महाविद्यालयांतून गणित शिकविण्यासाठीं त्यांचा उपयोग होऊं शकेल. 'लीलावती' पुस्तक भास्कराचार्यांपासून पुढें सातशें वर्षें गणिताचें क्रमिक पुस्तक म्हणून वापरांत होतें. अजूनही मध्यप्रांतांत तें कुठें कुठें वापरतात.

भास्कराचार्य हा दृक्प्रत्ययवादी ज्योतिषी होता. ग्रहणें, युत्या, वगैरे अंतरिक्षचमत्कार पंचांगांत दिलेल्या वेळेवर होत नसतील तर पंचांगें सुधारलीं पाहिजेत असें त्याचें मत होतें. सनातनी लोक पुष्कळदां कांहीं चुकीच्या कल्पना उराशी बाळगीत. त्यांत राहू व केतु, चंद्र व सूर्य यांना, ग्रहणकालीं गिळतात अशीं एक खुळी कल्पना लोकांत दीर्घकाल रूढ होती. वास्तविक चंद्रग्रहणसमयीं चंद्र पृथ्वीच्या छायेंत गेल्यामुळें अदृश्य होतो. भास्कराला ही गोष्ट ठाऊक असूनहि लोकांना ती पटविणें कठीण होतें. तो लोकांना सांगे की, 'मंडळींनो, राहू नांवाचा राक्षस नाहीं. पृथ्वीची छायाच चंद्राचा ग्रास करते. पण तुम्हांला राहू हवाच असेल तर असें म्हणा कीं, 'राहूनें पृथ्वीच्या छायेंत शिरून चंद्राचा ग्रास केला.' अशा रीतीनें जुन्या-नव्याचा समन्वय तो करीत असे. तो सुधारणावादी व्यवहारी शास्त्री होता. असें असलें तरी तत्त्वाला मुरड घालण्यास तो तयार नसे. लल्ल नांवाचा एक ज्योतिषी शके ४२१ त होऊन गेला. त्याच्या ग्रंथावरून, भास्कराच्या काळापर्यंत, लोक गणित शिकत. पण त्यांत अनेक सूत्रें चुकलेलीं म्हणजे दुष्ट झालेलीं होतीं. गोलाध्यायांत भास्कराचार्यांनें लल्लमताचें खंडन केलें आहे. गोलाध्यायाच्या 'भुवनकोष' प्रकरणांत श्लोक ५३ ते ६० यांत लल्लाचें गोलपृष्ठफळाचें सूत्र संपूर्णपणें चुकीचें आहे हें भास्कराचार्यानें दाखविलें आहे. तसेंच बरोबर सूत्र कोणतें तेंही 'क्षेत्रव्यवहार' या लीलावतीच्या प्रकरणांत सांगितलें आहे. भास्कराचार्य स्वतःस ब्रह्मगुप्ताचा शिष्य मानतो. तरी देखील, ब्रह्मगुप्ताचीं सूत्रें विनाकारण लांबलचक असतील तर, त्यावरही तो टीका करण्यास मागेंपुढें पहात नाहीं. लीलावतींतला चक्रीय चौकोनासंबंधीचा श्लोक १८६ पाहा. आर्यभटावरही त्यानें क्वचित् आपलें टीकास्त्र सोडलें आहे.

भास्कराचार्य बगदादला गेला असावा असें कै. दीक्षित म्हणतात. आपलेकडील कांहीं ज्योतिषी तुर्कस्तान व अरबस्तान या देशांत गेले होते. त्यांना मुद्दाम बोलावून नेण्यांत आले होतें असें अरबी ग्रंथांवरून दिसून येतें. पण त्यांचीं नांवें निश्चित समजत नाहींत. भास्कराचार्य जर तिकडे गेलाच असतां तर त्याच्या ग्रंथांत अल्-ख्वारिस्मी या अरबी गणितज्ञाचा (सन ९२९) किंवा त्याच्या अल्-जब्र-व-उल-मुकाबला या ग्रंथाचा उल्लेख आला असता. यावरून भास्कराचार्यांच्या परदेशगमनाला भरपूर पुरावा मिळत नाहीं.

भास्करकालीन सामाजिक परिस्थिति

अंकगणिताच्या पुस्तकावरून एकाद्या काळाचें सामाजिक परिस्थितीचें चित्र रेखाटणें हें अतिशय अवघड काम आहे. कारण गणिती मूल्यें हीं बाजारांत असणाऱ्या भावांची निदर्शक असतीलच अशी खात्री कोणी देऊं शकत नाहीं. तथापि भास्कराचार्यांच्या काळीं विद्वत्तेचें

मोजमाप दशग्रंथांच्या अभ्यासावरून होत होतें. बाजारभाव हल्लींच्या वीसपट तरी स्वस्त होते. सर्व प्रकारचा व्यापार लमाणांच्या साहाय्यानें होत होता. त्यावेळचा उच्चवर्ग चीन मधून आयात केलेलीं रेशमी वस्त्रें पेहरीत असे. स्त्रिया तरुणपणीं गुलाम म्हणून विकल्या जात असत. विद्वान मंडळींना राजाश्रय असे. रात्रीचा प्रवास धोकादायक असे. निष्क हें चांदीचें नाणें व्यवहारतांलें मुख्य नाणें होतें. मोर पाळण्याची प्रथा अधिक होती. कमळें, भृंगे, हत्ती, पक्षी यांनीं निसर्ग समृद्ध होता. शिव, विष्णु, गणेश यांची सर्वत्र पूजा होत होती. रामायण, महाभारत हे लोकांचे मुख्य पठणग्रंथ होते. आणि एकंदरींत काळ सुखदायक होता. सोन्याचा भाव जरा महाग होता. एकंदरीत धनधान्यसमृद्धि होती. तथापि ज्योतिर्विद मंडळी खगोलज्योतिष वाढविण्याऐवजीं फलज्योतिष वाढविण्यांत गर्क असत. शास्त्रीवर्ग हा बहुतेक राजाश्रयावर जगत होता. भास्कराचार्य कोणाचाच आश्रित नव्हता असें दिसतें.

भास्कराचार्यानंतर महाराष्ट्रांत तरी विद्वान् व प्रसिद्ध असे गणिती फारसे झालेच नाहींत. त्याच्याच ग्रंथाची घोकंपट्टी करणारे बरेच होते पण नवीन संशोधन करणारे असे विद्वान्, १७ व्या शतकाच्या अखेरीपर्यंत, थोडेच झाले. त्यांत नांव घेण्यासारखे दोनचारच असतील.

भास्कराचार्य शेवटपर्यंत प्रकृतीनें धडधाकट होता. तो वयाच्या ७९ व्या वर्षी, शके १११५ म्हणजे सन ११९३ मध्यें वारला. त्याच्या नंतरच्या काळांत भारतीय गणित एकदम मागें पडलें. आमची विज्ञानगंगा लुप्त झाली. त्याला अनेक कारणें झालीं. पण त्यांचा ऊहापोह करण्याचें हें स्थळ नव्हें. न्यूटनच्या योग्यतेच्या गणितज्ञास खरें म्हणजे पुढील शोध लागावयास हरकत नव्हती. त्याला दशांश अपूर्णांक ठाऊक नव्हते. त्यांचा शोध इटालींत १६ व्या शतकांत लागला. भास्कराचार्यास न्यूटनचा द्विपद-सिद्धांत कसा सुचला नाहीं हें एक कोडेंच आहे. लाग्रतमांची कल्पना त्याला आली असती तर त्याचें ज्या–साधन, आहे यापेक्षां, सोपें करतां आलें असतें. पृथ्वी जड वस्तूस आपणांकडे आकर्षिते हें त्यास ठाऊक होतें. पण प्रेरणा = प्रवेग × पिंड हें सूत्र त्यास सुचलें नाहीं. शून्यलब्धि ह्या शास्त्राचा शोध त्याला लागला नाहीं. तात्कालिक गति (instantaneous velocity) त्याला माहीत असूनही चलनकलनशास्त्रास तो मुकला. दीर्घवृत्त अन्वस्त, अपास्त, (ellipse, parabola, hyperbola) यांचें त्यास सम्यक् ज्ञान नव्हतें. या कांहीं गोष्टी त्या काळांत पाश्चिमात्यांनाही ठाऊक नव्हत्या. मग त्या भारतीयांना ज्ञात झाल्या नाहींत तर तें दोषार्ह नाहीं. पण बैजिक व भौतिक प्रश्नांची सैद्धांतिक उकल जर त्यानें दिली असती तर तो आहे याहूनही अधिक थोर गणिती झाला असता. तथापि आहे या कर्तबगारीवरही त्याचें स्थान प्राचीन व अर्वाचीन गणितज्ञांत पहिल्या दहांत आहे हें निश्चित.

आमच्याकडे असा गणकचक्रचूडामणि जन्माला यावा हें आमचें भाग्य. पण आम्ही असे कर्मदरिद्री कीं इ. स. १९५० त त्याच्या ‘ सिद्धांतशिरोमणीची ’ आठवी शताब्दि सादर करण्यास आम्ही पूर्णपणें विसरलों. निदान १९९३ मध्यें त्याची आठशेंवी पुण्यतिथि साजरी करण्याची आठवण ठेवूं या.

लीलावती

(पाटीगणित)

गणेशस्तुति

श्लोक १

प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विघ्नं विनिघ्नन् स्मृतः ।
तं वृंदारकवृंदवंदितपदं नत्वा मतंगाननम् ।।
पाटीं सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटाम् ।
संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैर्लालित्यलीलावतीम्* ।।१।।

अर्थ : जो भक्तजनांच्या ठिकाणीं प्रीति निर्माण करतो, ज्याच्या स्मरणानें विघ्नांचा नाश होतो, ज्याच्या चरणीं देवांचे समूह वंदन करतात, अशा गजाननास नमन करून; चतुर लोकांना प्रिय असणारी, स्पष्ट केलेली, संक्षिप्त, सुंदर व शुद्ध अशा शब्दांनीं जिच्यामध्यें लालित्य आलें आहे अशी लीलावती नांवाची पाटीगणिताची रीत पुढें सांगतों.

प्रकरण १

परिभाषा (कोष्टकें)

श्लोक २

वराटकानां दशकद्वयं यत् सा काकिणी ताश्च पणश्चतस्त्रः ।
ते षोडश द्रम्म इहावगम्यो, द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः ।।२।।

अर्थ : वीस वराटकांची एक काकिणी होते. चार काकिण्यांचा एक पण होतो. सोळा पणांचा एक द्रम्म होतो, सोळा द्रम्मांचा एक निष्क होतो.

स्पष्टीकरण : त्या काळीं म्हणजे ११-१२ व्या शतकांत चालू असलेल्या नाण्यांचे कोष्टक भास्कराचार्य देतो. तें असें-

---

* लीलावती-संबंधीच्या आख्यायिका शेवटीं जोडलेले परिशिष्ट क्रमांक ५ मध्यें पहा.

२० कवड्या = १ काकिणी (दमडी)	१६ पण (पैसे) = १ द्रम्म (पावली)
४ काकिणी = १ पण (पैसा)	१६ द्रम (पावल्या) = १ निष्क

विसाव्या शतकाच्या प्रारंभापर्यंत भारतांत नाण्यांची व्यवस्था साधारणतः वरील प्रकारचीच होती. ब्रिटिश अमदानींत पै, रुका व ढबू पैसा ही नाणीं प्रचारांत आली. पेशवाईतही अशी नाणीं प्रचलित असत. इ. स. १९१० मध्यें पुण्यांत वाण्याच्या दुकानीं एक पैशास ४० कवड्या मिळत. त्यांचा नाण्यासारखा उपयोग करतां येत असे. मिरच्या-कोथिंबिरीसारख्या किरकोळ वस्तु कवड्यांनीं विकत घेतां येत. दाम हा शब्द द्रम्म शब्दापासूनच झालेला आहे.

श्लोक ३ (सुवर्ण मापें)

तुल्या यवाभ्याम् कथितात्र गुञ्जाः । वल्लस्त्रिगुञ्जो धरणं च तेऽष्टौ ॥
गद्याणकस्तद्द्वयमिन्द्रतुल्यैः * । वल्लैस्तथैको धटकः प्रदिष्टः ॥३॥

अर्थ : दोन यवांची एक गुंजा होते, ३ गुंजांचा एक वाल होतो, आठ वालांचा एक धरण, दोन धरणांचा एक गद्याणक व १४ वालांचा एक धटक होतो.

स्पष्टीकरण : श्लोक तीन मध्यें चांदी किंवा सोनें या धातु तोलण्याचीं वजनें किंवा (मापें) सांगितलीं आहेत. जवसाची एक साळ म्हणजे टरफलासगट दाणा घेतला म्हणजे त्याला यव म्हणतात. श्राद्धपक्षासाठीं यवांची गरज असते. हल्लीं सोनें मेट्रिक पद्धतीनें म्हणजे ग्रॅम, मिलीग्रॅम या पद्धतींत विकलें जात असल्यानें गुंजा प्रचारांतून गेल्या आहेत. गुंजा हे एक प्रकारच्या झाडाचें फळ. हें लाल, काळें किंवा काळसर लाल अशा तिन्ही रंगांचें असतें. त्याचा आकार हिरव्या मुगाच्या दाण्याप्रमाणें असून आकारमान मूगदाण्याच्या दुप्पट असतें. गुंजाफळें कडक व टिकाऊ असल्यामुळें पूर्वकाळापासून सोनें व त्याचा अल्पांश मोजण्यास त्यांचा उपयोग होई. खेडेगांवांतून व शहरांतून सोनार अजून गुंजांचा उपयोग करतात. एक गुंज वजन म्हणजेच $१\frac{५}{१६}$ ट्रॉय ग्रेन होतें. हल्लीं गद्याण किंवा गद्याणक आणि धटक प्रचारांत नाहींत; पण वल्ल म्हणजे वाल प्रचारांत आहेत. कोष्टकाप्रमाणें एक धटक = ४२ गुंजा व एक गद्याणक = ४८ गुंजा होतात.

श्लोक ४

दशार्धगुंजं प्रवदन्ति माषं । माषाह्वयैः षोडशभिश्च कर्षम् ॥
कर्षैश्चतुर्भिश्च पलं तुलाज्ञाः । कर्षं सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञम् ॥४॥

अर्थ : पांच गुंजांचा १ मासा, १६ माशांचा एक कर्ष, ४ कर्षांचा एक पल, आणि सोन्याच्या कर्षास ' सुवर्ण ' असें सोनें-तोल जाणणारे लोक म्हणतात.

स्पष्टीकरण : भास्कराचार्यांच्या काळीं सुवर्ण तोलण्याचें मुख्य माप कर्ष हें होतें. ८० गुंजांचा एक कर्ष होत असे. सोनें तोलण्याचें आधुनिक परिमाण ९६ गुंजांचा एक तोळा असें

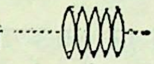
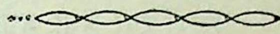
* १ इंद्र = १४. पुस्तकाच्या शेवटीं जोडलेल्या परिशिष्टांतील क्रमांक २ चे परिशिष्ट पहा.

आहे. अर्थात् आतां सोनें ग्राम ११ ३/५ ग्राम = १ तोळा या मेट्रिक पद्धतीच्या मापांत मोजलें जातें.

श्लोक ५ (लांबीची परिमाणें)

यवोदरैरङ्गुलमष्टसंख्यैः । हस्तोऽङ्गुलैः षड्गुणितैश्चतुर्भिः ॥
हस्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दण्डः । क्रोशः सहस्रद्वितयेन तेषाम् ॥५॥

अर्थ : आठ यवांचें एक अंगुळ होतें, ६×४ म्हणजे २४ अंगुळांचा एक हात होतो, चार हातांचा एक दंड होतो व २००० दंडाचा एक क्रोश म्हणजे कोस होतो.

स्पष्टीकरण : जवसाचे ८ दाणे  पोटास पोट चिकटून मांडल्यास एक अंगुळ एवढें अंतर म्हणजे हाताच्या पेऱ्याएवढें अंतर होतें; यव एकमेकांस  सांखळीसारखें टोंकास चिकटवून नव्हे. ऐतिहासिक काळांत कोणत्याच व्यवहारासाठीं प्रमाणित एकमानें नव्हतीं. भारतवर्षांत अनेक राज्यें, उपराज्यें असून, त्यांत निरनिराळीं वजनें, मापें प्रचलित असत. त्यामुळें लांबीचें परिमाण भारतांत सगळीकडे एकच होतें असें नाहीं. तथापि माणसाची उंची ३ १/२ हात धरल्यास देशभर सामान्यपणें एकच परिमाण सगळीकडे चालेल असें गृहीत धरून वरील परिमाणें ठरवलीं गेलीं. सामान्यतः एक हात २० इंचां-* एवढा, म्हणजे मनुष्याची उंची सामान्यतः ५ फूट १० इंच होते. ज्याला नक्की प्रमाणित असें म्हणता येईल असें लांबीचें एकमान ब्रिटिश अमदानींत सर्व देशांत रूढ झालें. जुनीं परिमाणें वाङमयांत व किरकोळ व्यवहारांत राहिलीं. हल्लीं सर्व ठिकाणीं मैल जाऊन किलोमीटर आला आहे. दोन मैलांबरोबर १ कोस असे. पण आतां मैल, कोस हे दोन्हींही राहाणार नाहींत.

श्लोक ६

स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन । तथा कराणां दशकेन वंशः ॥
निवर्तनं विंशतिवंशसंख्यैः । क्षेत्रं चतुर्भिःश्च भुजैर्निबद्धम् ॥६॥

अर्थ : ४ कोसांचा एक योजन होतो, दहा हातांचा एक बांबू होतो, २० बांबूंची ज्याची कड आहे अशा चौरसाच्या क्षेत्रास एक ' निवर्तन ' म्हणतात.

स्पष्टीकरण : लांबी मोजण्याचें सर्वत्र आढळणारें सोपें साधन म्हणजे वंश किंवा बांबू. इंग्रजी मापांतही ५ १/२ यार्ड = १ पोल (बांबू) असें परिमाण आहेच. पांचव्या श्लोकांत अंगुलि हा अवयव एकमान धरला आहे. इंग्रजी पद्धतींत फूट (= पाऊल) हा अवयव एकमान म्हणून घेतलाच आहे. विशेष म्हणजे येथें क्षेत्रफळाचें एकक एक ' निवर्तन ' (सुमारे २ एकर) दिलें आहे. (१ एकर = ०.४०८९ हेक्टार).

---

* १ इंच = २.५४०० सेंटिमीटर.

श्लोक ७ (धान्य मापें)

हस्तोन्मितैः विस्तृतिदैर्घ्यपिण्डैः । यद् द्वादशास्त्रं घनहस्तसंज्ञम् ॥
धान्यादिके यत् घनहस्तमानम् । शास्त्रोदिता मागधखारिका सा ॥७॥

अर्थ : ज्या पिण्डाची म्हणजे वस्तूची लांबी १ हात, रुंदी १ हात, जाडी १ हात आहे व ज्याला १२ कडा (edge) आहेत अशा पदार्थास घनहस्त म्हणतात. (म्हणजेच अशा वस्तूचें घनमान १ घनहस्त होतें). धान्यें मोजतांना ज्या धान्याचें आकारमान एक घनहस्त होतें तेवढ्या धान्याच्या मापास मगध देशांतील खारी म्हणतात.

स्पष्टीकरण : द्वादशास्त्र म्हणजे १२ कडा किंवा कट असलेला घन. कै. खानापुरकरशास्त्री अस्त्र म्हणजे कोंपरा किंवा कोन असा अर्थ घेतात तो बरोबर दिसत नाहीं. अस्त्र म्हणजे बाण किंवा रेषा असा अर्थ घेणें प्राप्त आहे. कारण घनाकृतीस कोंपरे ८ असतात, पण कडा १२ असतात. मगध देशांतली खारी ही त्या काळांत प्रमाणित धान्यमान असावें. हल्लींच्या उत्तरप्रदेशाचा दक्षिणभाग म्हणजे बनारस, अलाहाबाद, गया पाटणा येथला मुलूख. हा प्राचीन भारताचा महत्त्वाचा भाग होता. म्हणून तेथील मापें प्रमाणित मानली जात. धान्य मापण्याचें खारी हें एकक हल्लींच्या ८ पायली किंवा ३२ किलो एवढें होईल. शास्त्रोदित म्हणजे सरकारी आज्ञेंत सांगितल्याप्रमाणें, असा अर्थ घेतला पाहिजे.

श्लोक ८

द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः । स्यादाढको द्रोणचतुर्थभागः ॥
प्रस्थश्चतुर्थांश इहाढकस्य । प्रस्थांघ्रिराद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥८॥

अर्थ : खारीचा १६ वा हिस्सा म्हणजे १ द्रोण, द्रोणाचा चौथा हिस्सा म्हणजे एक आढक, आढकाचा पाव हिस्सा म्हणजे प्रस्थ व प्रस्थाचा चौथा भाग म्हणजे एक कुडव होय; असें पूर्वींचे लोक म्हणतात.

स्पष्टीकरण : पूर्वींच्या काळांतील मापें कोणत्या आकाराचीं होतीं याविषयीं या श्लोकांत कांहीं वर्णन दिलेलें नाहीं. पण धान्यमापें हल्लींसारखीं वृत्तचितीच्या आकाराचीं नसावीं. तर तीं अर्धच्छिन्न शंकुद्वयासारखीं म्हणजे शेजारी आकृतींत दाखविलेल्या आकाराचीं असावीं. या शतकाच्या प्रारंभीं अधोली, शेर, पावशेर वगैरे मापें धान्य मोजण्यासाठीं असत. कुडव हा शब्द, आठवें निठवें हे शब्द कोंकणांत अजूनही रूढ आहेत. हल्लींची सरकारी मापें, डालडाच्या डब्यासारख्या किंवा दुधाच्या 'लिटर' च्या आकाराचीं असतात. तसेंच हल्लीं धान्य मापून न देतां तोलन म्हणजे वजनी देण्याची प्रथा रूढ झाली आहे.



प्रस्थ

श्लोक ९

पादोनगद्याणकतुल्यटंकैः । †द्विसप्ततुल्यैः कथितोऽत्र शेरः ॥
मणाभिधानं खयुगैश्च† शेरैः । धान्यादिमानेषु तुरुष्कसंज्ञाः ॥९॥

अर्थ : पाऊण गद्याणकाचा म्हणजे ३६ गुंजांचा एक टांक होतो, ७२ टंकांचा १ शेर होतो. ४० शेरांचा मण होतो. धान्यमापनांत मापांच्या या तुर्की संज्ञा आहेत.

स्पष्टीकरण : वरील श्लोक लीलावतींत प्रक्षिप्त असावा असें वाटतें. कारण मण व शेर हीं तुर्की मापें आहेत असें म्हटलें आहे. भास्कराचार्यांच्या काळांत मुसलमानांचें प्राबल्य उत्तरेंत किंवा दक्षिणेंत कोठेंच वाढलेलें नव्हतें. फक्त गझनीच्या महंमुदाची स्वारी उत्तरेंत होऊन गेली होती. अर्थात् व्यापारउदीमाच्या संज्ञा वराहमिहिराच्या काळापासून लोकांस ठाऊक झाल्या असाव्या. पण व्यवहारांत रूढ नसाव्या.

यापुढें गद्यांत भास्कराचार्य सांगतात की,

शेषा कालादिपरिभाषा लोकप्रसिद्धा ज्ञेया ॥१०॥

अर्थ : उरलेली काळाची वगैरे परिमाणें लोकांस ठाऊक आहेत.

स्पष्टीकरण : वेळेची परिमाणें भास्कराचार्यानें गणिताध्यायांत फारच सूक्ष्म रीतीनें दिलेलीं आहेत. जितेंद्रिय पुरुषाच्या पापण्यांच्या उघडझांपीस जेवढा वेळ लागतो तेवढ्या काळास निमिष म्हणतात. निमिषाच्या ३० व्या विभागांत तत्पर ही संज्ञा आहे. तत्पराच्या शंभराव्या अंशास त्रुटि म्हणतात. कालमानाचें एकक निमिष धरून खालील कोष्टक तयार होतें.

१८ निमिष = १ काष्ठा   ३० काष्ठा = १ कला
३० कला = १ नक्षत्र घटिका (२ घटिका = १ क्षण)   ६० घटिका = १ दिवस

किंवा दुसराही एक प्रकार आहे. तो असा—

२० दीर्घ अक्षरें उच्चारण्यास लागणारा काळ = १ असु (श्वासोच्छ्‌वास)
६ असु = १ पळ   ६० पळें = १ घटिका   ६० घटिका = १ दिवस
३० दिवस = १ महिना (मास)   १२ महिने = १ वर्ष

याप्रमाणें परिभाषा प्रकरण समाप्त झालें.

---

† 'अंकानां वामतो गतिः' या नियमानें द्विसप्त = ७२, तसेंच खयुगाः = ४०. यांत ४ थ्या अंकासाठीं युग म्हणजे ४ हा शब्द वापरला आहे व शून्यासाठीं ख शब्द वापरला आहे. संख्यानिदर्शक शब्द परिशिष्ट २ मध्ये पहा.

संख्यास्थान निर्णय (स्थानपरत्वें किंमत)

श्लोक ११

लीलागललुलल्लोलकालव्यालविलासिने ।
गणेशाय नमो नीलकमलामलकान्तये ॥११॥

या श्लोकांत पुन्हां एकवार गणपतीची स्तुति केली आहे.

अर्थ : ज्याच्या गळ्याभोंवतीं काळरूपीं सर्प चंचलपणानें लोळत आहे व त्यामुळें जो शोभत आहे, ज्याची कांति नीलकमलाप्रमाणें नितळ आहे, अशा त्या गणेशास नमस्कार असो.

एकदशशतसहस्रायुतलक्षप्रयुतकोटयः क्रमशः ।
अर्बुदमब्जं खर्वनिखर्वमहापद्मशंकवस्तस्मात् ॥११॥
जलधिचान्त्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तरं संज्ञाः
संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थं कृताः पूर्वैः ॥१२॥

अर्थ : (उजवीकडून डावीकडे) अनुक्रमानें एकं, दहं, शतं, सहस्र, अयुत (दशसहस्र), लक्ष, प्रयुत (दशलक्ष), कोटि, अर्बुद (दशकोटि), अब्ज, खर्व, निखर्व, महापद्म, शंकु, जलधि, अंत्य, मध्य, परार्ध हीं संख्यास्थानें आहेत. ह्या प्रत्येक स्थानाची किंमत उजवीकडील स्थानाच्या दसपट आहे. ही मूल्यांची (स्थानपरत्वें) दशमानपद्धति पूर्वाचार्यांनींच सुलभ व्यवहारासाठीं केली आहे.

स्पष्टीकरण : आपल्या दशमानपद्धतीच्या अंकलिपींत, अंकांची किंमत स्थानपरत्वें वाढत जाते ही गोष्ट भारतीय गणितज्ञांनींच प्रथम शोधून काढली. ग्रीक व रोमन लोक संख्या-निदर्शनासाठीं अक्षर-लिपि वापरीत असत. त्यामुळें अंकगणिताची वाढ पूर्वयूरोपांत थंडावली. भारतांत दशमानपद्धतीच्या वापरामुळें तसेंच अंकांना १० चिन्हें वापरून संख्या लिहीत गेल्यानें अंकगणितांतील बेरीज वजाबाकी वगैरे कर्में सुकर झालीं. ज्यांना युरोपीय गणिती अरबी अंकचिन्हें म्हणतात तीं मूळचीं भारतीय होतीं. त्यांचा शोध इ. स. पूर्वी २०० वर्षें इतका तरी जुना आहे. हल्लींच्या देवनागरी अंकचिन्हांचा वापर भारताच्या निरनिराळ्या भागांत इ. स. ४०० पासून होऊं लागला. (परार्ध = $१०^{१८}$) अर्थात् संस्कृतांत ($१०^{५४}$) येथपर्यंत संज्ञा आहेत *. इंग्रजी अंकचिन्हें देवनागरी चिन्हांवरूनच उचललेलीं आहेत.

* History of Hindu Mathematics' by Datta and Singh.

प्रकरण ३

संकलित–व्यवकलित (बेरीज-वजाबाकी)

सूत्र : अथ संकलित-व्यवकलितयोः करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

अर्थ : बेरीज किंवा वजाबाकी करणें असल्यास त्याचें सूत्र वृत्ताच्या अर्ध्यानें म्हणजे अर्ध्या श्लोकांत सांगतों.

अर्थ : स्थानाप्रमाणें क्रमाक्रमानें (उजवीकडून डावीकडे किंवा उलट) अंकांची बेरीज अथवा वजाबाकी करावी.

श्लोक १३

कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथवाऽङ्कयोगो यथास्थानकमंतरं वा ।। १३ ।।

स्पष्टीकरण : बेरीज अथवा वजाबाकी करण्यासाठीं संख्या एकाखालीं एक लिहाव्या. त्यांत पहिल्या संख्येच्या एकं-स्थानाखालीं दुसऱ्या संख्येचा एकं-स्थानचा अंक, दहं स्थानच्या अंकाखालीं दहं-स्थानचा अंक याप्रमाणें लिहून, समस्थानच्या अंकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करावी. या श्लोकार्धांत दोन संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी कशी करावी, तें सांगितलें आहे. यांत दोन गोष्टी अध्याहृत धरल्या आहेत. समस्थानच्या अंकांची बेरीज दहांपेक्षां अधिक किंवा दहा झाल्यास हातचा एक घेणें ही एक गोष्ट. तसेंच वजाबाकी करतांना वर्ज्य संख्या दुसरीहून लहान असावी ही दुसरी गोष्ट. या स्पष्ट सांगितलेल्या नाहींत. तसेंच उत्क्रमानें म्हणजे डावीकडून उजवीकडे बेरीज - वजाबाकी करतां येत असली तरी आजकाल तशी रीत प्रचारांत नाहीं. बेरीज-वजाबाकीचें सूत्र थोडक्यांत देण्याचें कारण या क्रिया शिक्षकानें स्पष्ट करून सांगावयाच्या आहेत हें आहे. दोनपेक्षां अधिक संख्यांच्या बेरजेस हेंच सूत्र लागू. दोन संख्यांपेक्षां अधिक संख्यांची वजाबाकी एकदम होत नाहीं. ती क्रमाक्रमानें करावी लागते.

श्लोक १४

अये बाले लीलावति मतिमति ब्रूहि सहितान् ।
द्विपञ्चद्वात्रिंशत् त्रिनवतिशताष्टादश दश ।।
शतोपेतानेतानयुत-वियुतांश्चापि वद मे ।
यदि व्यक्ते युक्तिव्यवकलनमार्गेऽसि कुशला ।।१४।।

अर्थ : हे बुद्धिमान मुली लीलावती, जर तूं बेरीज-वजाबाकी करण्याच्या स्पष्ट रीतींत कुशल असशील तर २, ५, ३२, १९३, १८, १० व १०० यांची बेरीज १०००० मधून वजा केल्यास बाकी किती राहील तें सांग.

स्पष्टीकरण : अंक किंवा संख्या एकाखालीं एक स्थानपरत्वें लिहूं. म्हणजे शेजारील आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें त्या लिहिल्या जातील. एकं स्थानच्या अंकांची बेरीज २०, म्हणून रेषेखालीं ० लिहून हातचे २ घेतले. त्यासह दहं स्थानच्या अंकांची बेरीज १६. यांतले ६ दहं स्थानीं लिहून हातचा १ शत, शतं स्थानच्या अंकांच्या बेरजेंत मिळविला व बेरीज ३ शतं स्थानीं लिहिली. म्हणून बेरीज ३६० हे उत्तर. आतां ३६०, १०००० मधून वजा करावयाचे.

```
    २
    ५
   ३२
  १९३
   १८
   १०
  १००
 ----
  ३६०
```

```
 १००००
 − ३६०
 -----
  ९६४०
```

आकृती २ प्रमाणें शून्यांतून शून्य वजा केल्यास बाकी ०, शून्यांतून ६ वजा होत नाहीं म्हणून दहांतून ६ वजा करून बाकी ४ व हातचा एक ३ त मिळविला. याप्रमाणें करून बाकी ९६४०.

यांत गणितदृष्टचा महत्त्वाचे शब्द, सहित – जोडून, मिळवून; उपेत – जोडून, चिकटवून; युक्ति = बेरीज. येथें दिलेलें स्पष्टीकरण शिक्षकानें विद्यार्थ्यांस सांगावयाचें आहे.

प्रकरण ४

गुणनप्रकार (गुणण्याच्या रीति)

श्लोक १५, १६ व अर्धा श्लोक

गुण्यांत्यमंकं गुणकेन हन्यात् । उत्सारितेनैवमुपान्त्यमादीन् ।।
गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यः । तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वा ।।१५।।
भक्तो गुणः शुध्यति येन तेन । लब्ध्या च गुण्यो गुणितं फलं वा ।।
द्विधा भवेद्रूपविभाग एवं । स्थानैः पृथग्वा गुणितः समेतः ।।१६।।
इष्टोनयुक्तेन गुणेन निघ्ने । ऽभीष्टघ्नगुण्यान्वितवर्जितो वा ।।

रूपगुणरीत

अर्थ : गुण्य म्हणजे जिला गुणावयाचें त्या संख्येच्या अंत्य अंकास म्हणजे एकं स्थानच्या अंकास गुणक संख्येनें गुणावें. नंतर गुणकांकानें उपान्त्य म्हणजे दहं स्थानच्या अंकास गुणावें. याप्रमाणे आदिम अंकापर्यंत करावें. या रीतीस रूपगुणरीत म्हणतात.

स्पष्टीकरण : ही रीत लहान गुणक असल्यास लागू पडते. पुढील श्लोकांतील उदाहरण पहा. ज्या गुणकाचा तोंडी पाढा येत असेल त्यानें गुणावयाचें असल्यास ही रीत सोपी पडणार. मात्र गुणाकारांत हातचा असेल तो पुढील खंडगुणाकारांत मिळविला पाहिजे. श्लोकांत हातच्यासंबंधीं विवेचन नाहीं. तें अध्याहृत समजावें.

खंडगुणरीत

अर्थ : गुणकाचे खंड किंवा विभाग करून प्रत्येक खंडानें गुण्यास गुणून गुणाकार एकाखालीं एक लिहून बेरीज करावी.

स्पष्टीकरण : गुण्याचे एकांकी वा द्वयंकी विभाग करुन दोन गुणाकार करावे. (गुणक ४५ असेल तर त्याचे ३० व १५ विभाग करावे. यांचे पाढे ठाऊक असल्यानें गुणन सोपें होईल.)

विभागगुणरीत

अर्थ : गुणक संख्येचे अवयव पडत असतील तर एका अवयवानें प्रथम गुणून नंतर येणाऱ्या गुणाकारास उरलेल्या अवयवानें गुणावें. (गुणक ४५ असेल तर गुण्यास प्रथम ९ नें व येणाऱ्या गुणाकारास नंतर ५ नें गुणावें.)

स्थानगुणनरीत

अर्थ : गुणकांत जितकी स्थानें असतील त्या त्या अंकांनी गुण्यास स्वतंत्र रीतीनें गुणून त्या त्या स्थानाखालीं ते गुणाकार लिहून बेरीज करावी.

स्पष्टीकरण : गुणकांत २ अंक असल्यास प्रथम गुणाकार एकं स्थानापासून डावीकडे लिहावा व द्वितीय गुणाकार दहं स्थानापासून डावीकडे लिहावा व बेरीज करावी. गुणकांत तीन आंकडे असल्यास पहिला गुणाकार एकं स्थानापासून, दुसरा दहं स्थानापासून, तिसरा सहस्र स्थानापासून याप्रमाणें लिहून बेरीज करावी. गुणक कितीही मोठा असला तरी हाच नियम लागू पडतो.

इष्टांक वजा करण्याची किंवा मिळवण्याची रीत

अर्थ : दिलेल्या गुणकांतून एक सोयीस्कर अंक वजा द्यावा व उरलेल्या संख्येनें गुण्यास गुणावें व त्यांत इष्टांकाचा व गुण्याचा गुणाकार मिळवावा. किंवा गुणकांत एक सोयीस्कर अंक मिळवून त्यानें गुण्यास गुणावें व त्यांतून इष्टांक × गुण्य हा गुणाकार वजा द्यावा.

स्पष्टीकरण : हा इष्टांक असा असावा कीं, लागणारे सर्व गुणाकार झटकन करतां यावेत.

वरील सर्व रीती गुणाकाराची मूळ तत्त्वें ग्रथित करतात.

या सर्व रीती स्पष्टतेनें समजण्यासाठीं भास्कराचार्य पुढील उदाहरण देतो.

श्लोक १७

बाले बालकुरंगलोलनयने लीलावति प्रोच्यताम् ।
पंचत्र्येकमिता दिवाकरगुणा अंकाः कति स्युर्यदि ।।
रूपस्थानविभागखंडगुणने कल्पासि कल्याणिनि ।
छिन्नास्तेन गुणेन ते च गुणिता अंकाः कति स्युर्वद ।।१७।।

अर्थ : हरिणाच्या छाव्याच्या डोळ्यांप्रमाणें जिचे डोळे लाडिक आहेत अशा कल्याणकारी बाले, जर तूं रूपस्थानविभाग खंडगुणाकाराची रीत नीट जाणत असशील तर १३५ स १२ नें

गुणिलें असतां गुणाकार काय होईल तें सांग; तसेंच त्या गुणाकारास गुणकानें भागिलें असतां उत्तर किती येईल तेंही सांग.

स्पष्टीकरण : पहिल्या रीतीप्रमाणें, १३५×१२=१६२०.

हिशेब असा :– १२ पंचे ६०, यांत एकं स्थानी शून्य लिहून हातचे ६ घेतले. नंतर १२ त्रिके ३६, यांत हातचे ६ मिळविले. म्हणजे ४२ होतात. यांतले २ दहं स्थानी लिहून हातचे ४ राखले. नंतर १२ नें १ स गुणून त्यांत ४ मिळविले व १६ हे २०चे डावे अंगांस लिहिले. गुणाकार १६२० आला. वरील गुणाकार

$$\begin{array}{r} १३५ \\ \times\ १२ \\ \hline १६२० \end{array}$$

असाही लिहितां येईल. (खानापूरकर शास्त्र्यांनीं लावलेला रूपगुण-रीतीचा अर्थ बरोबर दिसत नाहीं.)

दुसऱ्या रीतीप्रमाणें, गुणक १२ चे २ विभाग ८+४ असे पाडावे. मग
१३५ × ८ = १०८०; व १३५ × ४ = ५४०
आणि १०८० + ५४० = १६२० हें उत्तर.

अर्थात् गुणकाचे खंड ७ + ५ असेंही घेतां येतील. पण खंड असे असावे कीं, गुणाकार सोपे होतील.

तिसऱ्या रीतीप्रमाणें, १२ चे अवयव ३ × ४.
म्हणून १३५ × ४ = ५४० व ५४० × ३ = १६२० हें उत्तर.
अर्थात् ज्या ठिकाणीं गुणकाचे अवयव पडत नसतील तेथें ही रीत उपयुक्त नाहीं. गुणाकारांत साधारणपणें गुण्य मोठा व गुणक लहान असतो. जेथें गुणक लहान आहे पण त्याचे अवयव पडत नाहींत तेथें गुण्याचे अवयव पाडून ही रीत लावतां येईल.

चौथ्या रीतीप्रमाणें, १२ गुणकांत एकं स्थानीं २ व दहं स्थानीं १ आहेत.

$$\begin{array}{r} १३५ \\ \times\ १२ \\ \hline २७० \\ १३५ \\ \hline १६२० \end{array}$$

म्हणून आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें एकं स्थानापासून १३५ × २ म्हणजे २७० लिहिले व दहं स्थानापासून १३५×१=१३५ लिहिले. नंतर बेरीज केली. येथें खालचा गुणाकार वस्तुतः १३५ × १० इतका म्हणजे १३५० आहे. ह्या नियमांत गुणक ३ अंकीं, ४ अंकीं किंवा आणखी मोठा असला तरी प्रत्येक वेळी एकच अंकानें गुणावयाचें असल्यानें प्रत्येक उपगुणाकार सहज करतां येतो. फक्त हे गुणाकार योग्य स्थानी लिहिले पाहिजेत.

पांचवी रीत :— १२ या गुणकाचे विभाग १० व २ करून (१२ – २ = १०) नंतर १३५ × १० = १३५० आणि १३५ × २ = २७० यांची बेरीज करावी किंवा १२ + ८ = २० यांत ८ इष्टांक धरावा. नंतर १३५ × २० = २७०० यांतून ८ × १३५ = १०८० हे वजा करावे. दोन्हीं रीतींनीं १६२० हेंच उत्तर येईल.
श्लोक १७ मध्यें "पंचत्र्येकमिता" म्हणजे पांच, तीन, एक यांनीं झालेली संख्या. "अंकानां वामतो गतिः" या नियमानें १३५ ही संख्या झाली (गुण्य) व "दिवाकर गुणाः'

म्हणजे गुणक १२. (दिवाकर म्हणजे सूर्य = १२). या श्लोकांत लीलावतीस* उद्देशून कांहीं संबोधनें वापरलेलीं आहेत, तेव्हां भास्कराचार्य कोणातरी मुलीला हे गणित शिकवीत असावा असें वाटतें.

प्रकरण ५

भागहार (भागाकार)

भागाकार करण्याचा नियम खालील श्लोकांत सांगितला आहे.

श्लोक १८

भाज्याद्धरः शुद्ध्यति यद्गुणः स्यात् । अन्त्यात्फलं तत्खलु भागहारे ॥
समेन केनाप्यपवर्त्य हार- । भाज्यौ भवेद्वा सति संभवे तु ॥१८॥

अर्थ : भाज्याच्या अंतिम अंकांतून (सुरुवातीचा, डावीकडचा) भाजक जितके वेळां वजा जाऊं शकेल तितका भागाकार येतो किंवा भाज्य व भाजक यांना एकाच संख्येनें भाग जात असेल तर तसा भाग देऊन (संक्षिप्त करून) नंतर भागाकार केल्यास तोच भागाकार येईल.

स्पष्टीकरण : भागक्रियेंत तीन राशि असतात. भाज्य म्हणजे ज्यास भागावयाचें ती संख्या, भाजक किंवा हर म्हणजे जिनें भागावयाचें तीं संख्या व भागक्रिया केल्यानंतर येणारी संख्या. (हिला भागाकार, भागफल, भजनफल, लब्धि अशीं नांवें दिलेलीं आढळतात.) ही क्रिया स्पष्ट करण्यासाठी श्लोक १७ च्या शेवटीं दिलेलें उदाहरण घेऊं.

१६२० या संख्येस १२ नें भागिलें असतां भागाकार काय ?

पहिल्या रीतीनें–– १२ हा भाजक १६ मधून एक वेळां अपवर्तित म्हणजे वजा होतो.

१२) १६२० (१३५
१२
——
४२
३६
——
६०
६०
——
००

म्हणून भागाकारांतील प्रथमांक १ झाला. शेष म्हणजे बाकी ४ राहिली. त्यावर २ घेऊन पुढील उपभाज्य ४२ झाला. यांतून १२ ची तिप्पट ३६ वजा जाते. म्हणून भागाकारांतील द्वितीय अंक ३ झाला. भाज्य अशा रीतीनें शुद्ध केल्यानंतर शेष ६ व भाज्यांतील शून्य त्यापुढें ठेवल्यावर अन्त्य भाज्य ६० झाला. १२ नें भागून फलांक ५ आला. म्हणजे भागाकार १३५ झाला.

दुसऱ्या रीतीनें –– भाज्य व भाजक यांना ३ व ४ यांनीं भाग जातो.

∴ ३) १६२० (५४०.
१५
——
१२
१२
——
००
००
——
००

आणि

४) ५४० (१३५
४
——
१४
१२
——
२०
२०
——
००

---

* या संबंधांत 'लीलावतीसंबंधीं आख्यायिका' हें परिशिष्ट, क्रमांक ५ पहावें.

प्रथम १६२० ला ३ नें भागून भागाकार ५४० आला व ५४० ला ४ नें भागून भागाकार १३५ आला. याचाच अर्थ

$\frac{१६२०}{१२} = \frac{५४०}{४}$ = १३५. तसेंच $\frac{१६२०}{१२} = \frac{४०५}{३}$ = १३५, असेंहि होऊं शकेल. किंवा प्रथम सहानें संक्षेप देऊन नंतर २ नें भागिल्यास उत्तर १३५ येईल. वरील उदाहरणांत शेष शून्य आहे. पण जर भागाकारांत बाकी उरत असेल तर $\frac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}}$ याला संक्षेपरूप दिल्यानें बाकी बदलेल पण भजनफल तेंच राहील. वरील दुसरी रीत ही सशेष भागाकारास लागूं पडणार नाहीं.

उदाहरणार्थ, $\frac{४२७}{२८}$ या भागाकारांत १५ ही लब्धि व शेष ७. पण $\frac{४२७}{२८} = \frac{६१}{४}$.

येथें १५ ही लब्धि व शेष १. वस्तुतः $\frac{४२७}{२८} = १५\frac{७}{२८} = १५\frac{१}{४}$.

प्रकरण ६

वर्ग करण्याचें सूत्र

श्लोक १९ रीत पहिली

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ । स्थाप्योन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्ना :॥
स्वस्वोपरिष्ठाच्च तथाऽपरेऽङ्काः । त्यक्त्वान्त्य मुत्सार्य पुनश्च राशिम्।१९।

अर्थ : दोन समान संख्यांच्या गुणाकारास वर्ग किंवा कृति म्हणतात. वर्ग करतांना खालील रीत लावावी. प्रथम डावीकडच्या आंकड्याचा वर्ग त्याचे डोक्यावर लिहावा. नंतर याच आंकड्याच्या दुपटीनें डावीकडून दुसऱ्या अंकास गुणून गुणाकार याच आंकड्याच्या डोक्यावर लिहावा. नंतर तिसऱ्या अंकास याच दुपटीने गुणून गुणाकार तिसऱ्या अंकाच्या डोक्यावर लिहावा. अशा रीतीनें एकं स्थानापर्यंत आल्यावर डावीकडचा अंक खोडावा व उरलेली संख्या एक घर (किंवा स्थान) उजवीकडे सरकावी. नंतर या उर्वरित राशीवर वरच्यासारखीच क्रिया करावी. शेवटीं या सर्व गुणाकारांची बेरीज करावी. आलेली बेरीज ही वर्ग होईल.

श्लोक २० रीत दुसरी व तिसरी

खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी । तत्खण्ड वर्गैक्ययुता कृतिर्वा ॥
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् । इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥

अर्थ : रीत २ :– दिलेल्या संख्येचे दोन विभाग करून, विभागांच्या गुणाकाराच्या दुपटींत, विभागांच्या वर्गांची बेरीज मिळवावी. येणारी बेरीज दिलेल्या संख्येचा वर्ग होतो.

रीत ३ :– दिलेल्या संख्येंत एखादी इष्ट म्हणजे सोयीस्कर संख्या मिळवावी व तींतून वजा करावी. या बेरीज, वजाबाकी यांच्या गुणाकारांत इष्ट संख्येचा वर्ग मिळवावा म्हणजे दिलेल्या संख्येचा वर्ग होतो.

वर्ग करण्याच्या सूत्रावरील उदाहरणें

श्लोक २१ मध्यें कांहीं संख्यांचे वर्ग विचारले आहेत.

ते भास्करीय पद्धतीनें सोडवून दाखविले आहेत व स्पष्टीकरणांत त्याची बैजिक भूमिका स्पष्ट केली आहे.

श्लोक २१

सखे नवानां च चतुर्दशानाम् । ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य ।।
पंचोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गम् । जानासि चेद्वर्गविचारमार्गम् ।। २१।।

अर्थ : हे मित्रा, नऊ, चौदा, २९७ व दहा हजार पांच (१०००५) या संख्यांचे वर्ग, जर तुला वर्ग करण्याची कृति ठाऊक असेल, तर सांग.

स्पष्टीकरण : नऊ आणि चौदांचे वर्ग सोपे आहेत म्हणून २९७ चा वर्ग तिन्ही रीतींनीं करून दाखविला आहे.

पहिल्या रीतीनें : प्रथम **अ** ओळींत २९७ लिहा. सोईसाठीं २, ९, ७ यांच्या बाजूस उभ्या रेघांनी स्तंभ तयार करा. वर्गांत असे ५ स्तंभ किंवा उभ्या ओळी लागतील. कारण २ चा वर्ग ४ हा एकाच आंकड्याचा आहे. आतां २ चा वर्ग ४ हा दोहोंच्या डोक्यावर लिहा. (आकृति पाहा). नंतर २ ची दुप्पट ४ यांनीं ९ स गुणून गुणाकार ३६ येतो. त्यांतले ६ नऊच्या डोक्यावर व ३ डावे अंगास म्हणजे ४ चे वर लिहा. नंतर ४ नें ७ स गुणून २८ होतात. त्यांतले ८ हे सातचे डोक्यावर व २ त्याचे डावीकडे म्हणजे ६ चे वर लिहा. यानंतर २९७ हे **ट** ओळींत एक घर उजवीकडे सरकवून २ खोडा. नंतर ९७

ड	८	८	२	०	९
क				४	९
		१ ८	२ १	६	
ब	३ ४	२ ६	८		
अ	२	९	७		
ट		२	९	७	
ठ			२	९	७

वर हीच कृति पुन्हां करा. ९ चा वर्ग ८१ हा मूळ ७ च्या स्तंभांत ८ चे वर १, व त्याचे डावे अंगास ८ असा लिहा. नंतर ९ ची दुप्पट १८ यांनीं ७ स गुणून गुणाकार १२६ हा **ट** ओळींतल्या ७ चे वर ६, व त्याचे डावे अंगास २, व २ चे डावे अंगास १ असा आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें लिहा. नंतर **ठ** ओळींत दाखविल्याप्रमाणें २९७ एक घर उजवीकडे सरकवून त्यांतले २ व ९ खोडा. उरलेल्या ७ चा वर्ग ४९ यांतले ९ हे ७ चे वर व ४ त्याच्या डावे बाजूस असे लिहा. म्हणजे सर्व उपगुणाकार लिहून झाले. यांची बेरीज करा म्हणजे ८८२०९ हा वर्ग आला. कांहीं लेखक **अ** आणि **ब** रेषेमधील उपगुणाकारांची बेरीज ७८८ यांत **ब, क**

७८८
९३६
  ४९
———
८८२०९

रेषांतल्या उपगुणाकारांचीं बेरीज ९३६ व क वरील ४९ यांची बेरीज करतात. यांत ९३६ हे ७८८ शीं तुलना करतां एक घर उजवीकडे सरकविले आहेत. पण ४९ दोन घरे (९३६ च्या) उजवीकडे दाखविले आहेत. खानापूरकर शास्त्री व पंडित हरि-प्रसाद भगीरथ यांनीं याचें योग्य विवेचन केलें नाहीं. अर्थात् प्रत्यक्ष गुणाकार लिहितांना आडव्या उभ्या रेघांची जरूर नसते. हें उदाहरण दुसऱ्या रीतीनें असें करतां येईल :

रीत दुसरी :– २९७ चे २ विभाग २९० + ७ असे करावे. नंतर
२९०^२ = ८४१०० यांत ७^२ = ४९ व ७ × २ × २९० = ४०६० हे मिळवावे.
∴ ८४१०० + ४०६० + ४९ = ८८२०९ हें उत्तर आलें.
रीत तिसरी :– २९७ मध्यें इष्टांक ३ मिळवावा व वजा करावा. येणाऱ्या संख्या ३०० व २९४ यांच्या गुणाकारांत ३^२ = ९ मिळवावे.
∴ ८८२०० + ९ = ८८२०९ हें उत्तर.

या तीन रीतींच्या मागें भूमिका बीजगणिताची आहे.

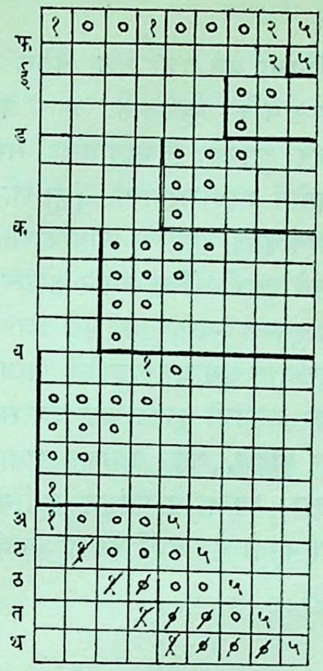
पहिल्या रीतीत (**अ** + **ब** + **क**)^२ = **अ**^{२} + २ **अब** + २ **अक** + **ब**^{२} + २**बक** + **क**^{२}.
भास्कराचार्यांच्या पहिल्या रीतींतले उपगुणाकार ४, ३६, २८, ८१, १२६ व ४९ हे अनुक्रमें **अ**^{२}, २ **अब**, २**अक**, **ब**^{२}, २**बक** व **क**^{२} या रकमा दाखवितात. यांतही गंमत ही आहे कीं ९७ चा वर्ग **ब**^{२} + २**बक** + **क**^{२} एवढा म्हणजे शेवटच्या संख्या ८१, १२६ व ४९ यांची स्थानपरत्वें बेरीज केल्यास मिळतो. ही बेरीज ९४०९ होते. याचाच अर्थ,

  ४९
१२६
८१
———
९४०९

पहिल्या रीतींत, ७ चा वर्ग ४९, ९७ चा वर्ग ९४०९ आणि २९७ चा वर्ग ८८२०९ हे सर्व एकदम दिसूं शकतात.
वरील दुसऱ्या रीतीची उपपत्ति (**अ** + **ब**)^२ = **अ**^{२} + २ **अब** + **ब**^{२} या सूत्रानें स्पष्ट होईल. यांत संख्येचे दोन विभाग सोयीप्रमाणें २९० + ७ किंवा २०० + ९७ असेही करतां येतील.

तिसऱ्या रीतींत बैजिक सूत्र (**अ** + **ब**) (**अ** – **ब**) = **अ**^{२} – **ब**^{२} हें वापरलें आहे. याचा उपयोग करून **अ**^{२} = (**अ** + **ब**) (**अ** – **ब**) + **ब**^{२} इतका होतो. वरील उदाहरणावरून सूत्राचा उपयोग स्पष्ट आहे. अर्थात् दुसऱ्या व तिसऱ्या रीतीपेक्षां पहिल्या रीतीनें मोठ्या संख्यांचे वर्ग लवकर करतां येतील. मात्र अंक योग्य स्थानीं लिहिण्याची काळजी घेणें जरूर आहे.

आतां १०००५ या संख्येचा वर्ग करूं. पहिल्या रीतीप्रमाणें खालील मांडणीनें वर्ग मिळेल. अ ओळींत १ आहे. त्याचा वर्ग १ त्याच्या डोक्यावर. १ ची दुप्पट २.



२×०=०० त्याच्या डोक्यावर. नंतर २×० = ००० त्याच्या डोक्यावर. या प्रमाणें २ × ५ = १० अच्या वर पांचव्या ओळींत. नंतर १०००५ एक घर उजवीकडे ट ओळींत सरकविले व १ खोडला. नंतर ० × ०, ० × ००, ० × ०००, ० × ०००५ हे गुणाकार ब आणि क ओळींच्या दरम्यान लिहिले. पुन्हां १०००५ ठ ओळींतल्या प्रमाणें उजवीकडे सरकवून १ व ० खोडले. वरीलप्रमाणें क व ड या ओळींतल्या प्रमाणें गुणाकार आले. पुन्हां त ओळींत १०००५ घेऊन १, ०, ० खोडले व ड, ई यांच्या दरम्यान ० व ०० हे गुणाकार उजवीकडे लिहिले. नंतर थ ओळींत १०००५ सरकवले व १, ०, ०, ० खोडले. ५ चा वर्ग २५ हा ५ च्या डोक्यावर वरच्या ओळींत लिहिला. आणि अ रेषेवरील सर्व अंकांची बेरीज फ रेषेच्या वरील ओळींत केली. तेव्हां १००१०००२५ हा वर्ग आला.

दुसऱ्या रीतीनें

$$(१०००५)^२ = (१०००० + ५)^२$$
$$= \left.\begin{array}{r} १०००००००० \\ +\ १००००० \\ +\ २५ \end{array}\right\} = १००१०००२५$$ हें उत्तर येतें.

प्रकरण ७ वे

वर्गमूळ काढणें

श्लोक २२

त्यक्त्वान्त्याद्विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते ।
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ॥
पंक्त्या पंक्तिहृते समे ऽन्त्यविषमात्त्यक्त्वाप्तवर्गं फलम् ।
पंक्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्तेर्दलं स्यात्पदम् ॥२२॥

अर्थ :– (ज्या संख्येचें वर्गमूळ काढावयाचें असेल तिच्यावर एकं स्थानापासून डावीकडे उभा दंड, आडवा दंड अशा एका आड एक खुणा कराव्या. म्हणजे दोन दोन अंकांचे, संख्येचे विभाग पडतील. सर्वांत डावीकडचा विभाग एक अंकी किंवा द्व्यंकी होऊन, विभागाच्या अंतिम अंकावर उभ्या दंडाची खूण येईल.) या विभागांतल्या सर्वांत डाव्या विभागांतून

शक्य तितका मोठा वर्ग वजा करावा. नंतर ज्या अंकाचा वर्ग वजा केला असेल त्याची दुप्पट शेजारीच थोडया अंतरावर लिहून ठेवावी. यास पंक्ति म्हणतात. आतां पहिल्या विभागांतून वर्ग वजा केल्यानंतर उरलेल्या बाकीवर दुसऱ्या विभागांतला सम अंक (आडव्या रेषेखालचा) घ्यावा. या संख्येस प्रथम पंक्तीनें भाग लावावा. (हा लागलेला भाग ९ पेक्षां अधिक होत असेल तर भाग ९ चाच लावावा.) येणाऱ्या भागांकाची दुप्पट पहिल्या पंक्तीमध्यें एक घर सरकवून मिळवावी म्हणजे दुसरी पंक्ति तयार होईल. नंतर राहिलेल्या शेषावर दुसरा विषमांक घ्यावा; व त्यांतून दुसऱ्या भागांकाचा वर्ग वजा द्यावा. उर्वरित बाकीवर दुसरा समांक घेऊन येणाऱ्या भाज्यास दुसऱ्या पंक्तीनें भाग द्यावा म्हणजे वर्गमूळाचा तिसरा अंक मिळेल. या तिसऱ्या अंकाची दुप्पट एक घर सरकवून दुसऱ्या पंक्तींत मिळवावी म्हणजे तिसरी पंक्ति तयार होईल. नंतर पूर्वोक्त भागाकारांतल्या बाकीवर पुढला विषमांक (उभ्या रेषेखालचा) घ्यावा व त्यांतून तृतीयांकाचा वर्ग वजा द्यावा. याप्रमाणें पुनः पुनः करून शेवटल्या पंक्तीच्या अर्धी संख्या घ्यावी. हेंच दिलेल्या संख्येचें वर्गमूळ होय.

श्लोक २३

मूलं चतुर्णां च तथा नवानां । पूर्वं कृतानां च सखे कृतीनाम् ।
पृथक्-पृथक् वर्गपदानि विद्धि । बुद्धेर्विवृद्धिर्यदि ते ऽत्र जाता ॥ २३ ॥

अर्थ : हे मित्रा, जर तुझ्या बुद्धीस या ठिकाणी चालना मिळाली असेल तर, ४, ९ व पूर्वी केलेले वर्ग, १९६, ८१, ८८२०९, व १००१०००२५ यांची वर्गपदें (वर्गमूळें) सांग.

स्पष्टीकरण : भास्कराचार्याच्या रीतीनें ८८२०९ चें वर्गमूळ काढू. उभ्या आडव्या खुणांनी

```
   ।–।–।
   ८८२०९
   ४
४) ४८ (९
   ३६
   १२२
    ८१
५८) ४१० (७
    ४०६
     ४९
     ४९
     ००
```

मूळ	पंक्ति	
२	४	प.
९	१८	
	५८	दु.
७	१४	
	५९४	ति.
	÷२	
२९७	२९७	

संख्या ।–।–। ८८२०९ झाली. यांतल्या प्रथम विभाग ८ मधून २ चा वर्ग ४ वजा जातो. पण ३ चा वर्ग ९ वजा जात नाहीं. म्हणून पहिल्या ८ मधून $२^२=४$ वजा दिले व राहिलेल्या ४ वर पुढले ८ घेऊन ४८ भाज्य तयार केला. नंतर $२\times२=४$ ही प्रथम पंक्ति भाजक करून ४८ स भाग दिला. अर्थात जास्तींत जास्त एक अंकी भाग ९ चाच लागेल. हा ९ मूळाच्या स्तंभांत २ च्या खालीं लिहिला. त्याची दुप्पट पंक्तीच्या स्तंभांत ४ खालीं एक घर सरकवून

लिहून बेरीज केली. म्हणजे दुसरी पंक्ति ५८ झाली. नंतर ९×४=३६ हे ४८ मधून वजा केले; व शेष १२ वर वरचा विषमांक २ लिहिला. यांतून ९ चा वर्ग ८१ वजा दिला. बाकी ४१ वर पुढील समांक ० घेतला व झालेला भाज्य ४१० याला दुसरी पंक्ति ५८ हा भाजक करून ७ चा भाग लावला. (८ चा भाग लागत नाहीं.) ७ वर्गमूळाच्या स्तंभांत ९ खालीं लिहून, ७×२=१४ हे दुसऱ्या पंक्तीखालीं एक घर सरकवून लिहिले व बेरीज केली. तेव्हां तृतीय पंक्ति ५९४ झाली. नंतर ५८×७=४०६ हे ४१० तून वजा दिले; व बाकी ४ वर शेवटचा विषमांक (उभ्या रेषेखालचा) लिहून ४९ मधून ७ चा वर्ग ४९ वजा दिला. बाकी शून्य राहिली. आतां वर्गमूळ सांगायचे तर पहिल्या म्हणजे मूलांक स्तंभांतले २, ९, ७ हे एकापुढें एक लिहून २९७ झालें. किंवा तिसऱ्या पंक्तींतल्या ५९४ स २ नें भागल्यास २९७ हें मूळ मिळतें.

यांत मुख्य गोष्ट ही आहे कीं भास्करीय पद्धतींत वर्गमूळाच्या भागाकारांत प्रत्येक वेळीं एक आंकडा बाकीवर घेऊन पुढील भाज्य तयार केला आहे. आधुनिक रीतींत बाकीवर दोन अंकीं विभाग घेऊन पुढील भागांक पाहतात.

याच पद्धतीनें १००१०००२५ याचें वर्गमूळ खालीं काढलें आहे. स्पष्टीकरण दिलें नाहीं

```
 ।–।–।–।–।
१००१०००२५
 १
२)०० (०
  ००
  ००
  ००
२०) ०१ (०
    ००
    १०
     ०
२००) १०० (०
     ०००
     १०००
     ००००
२०००) १०००२ (५
      १००००
         २५
         २५
         ००
```

मूळ	पंक्ति	
१ ०	२ ००	१ ली
०	२० ००	२ री
०	२०० ००	३ री
५	२००० १०	४ थी
१०००५	२००१०	५ वी

उत्तर :—१०००५. ५वी पंक्ति २००१० यास २ नें भागून किंवा मूलांक एकापुढें एक ठेवून उत्तर येतें.

घन करण्याचें सूत्र

श्लोक २४

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः। स्थाप्यो घनोन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः ।।
आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गः। त्र्यन्त्याहतोऽथादिघनश्च सर्वे ।। २४ ।।

श्लोक २५

स्थानान्तरत्वेन युतो घनः स्यात्। प्रकल्प्य तत्खंडयुगं ततोऽन्त्यम् ।।
एवं मुहुर्वर्गघनप्रसिद्धा –। वाद्यंकतो वा विधिरेष कार्यः ।। २५ ।।

रीत १– अर्थ : घन म्हणजे तीच संख्या तीनदां घेऊन झालेला गुणाकार. दोन अंकीं संख्येचा घन करणें असल्यास प्रथम अंत्य म्हणजे डाव्या बाजूच्या अंकाचा घन करावा. त्याखालीं एक घर उजवीकडे सरकवून ३ ×अन्त्य^{२} × आदि (उजवीकडील अंक) हा गुणाकार मांडावा. त्याखालीं एक घर उजवीकडे सरकवून ३ × आदि^{२} × अंत्य हा गुणाकार लिहावा. शेवटी याच प्रमाणें आदि^{३} म्हणजे उजवीकडील आंकडयाचा घन लिहून बेरीज करावी म्हणजे दिलेल्या संख्येचा घन मिळेल. हीच क्रिया आदिकडून अंताकडे केली असतां चालते. मात्र गुणाकार डावीकडे सरकविले पाहिजेत. तसेंच संख्येंत जर दोहोंपेक्षा जास्त अंक असतील तर प्रथम डावीकडच्या दोन अंकांचा घन करून घ्यावा व या अंकांस नवीन अन्त्य समजून पुढें क्रिया चालू ठेवावी. (या प्रमाणें वर्गविधि व घनविधि उजवीकडून केले तरी चालतात.)

श्लोक २६

खंडाभ्यांच हतो राशिस्त्रिघ्नः खंडघनैक्ययुक् ।
वर्गमूलघनः स्वघ्नो वर्गराशेर्घनो भवेत् ।। २६ ।।

रीत २– अर्थ : एखाद्या संख्येचे २ खंड करून त्यांच्या गुणाकारास संख्येच्या तिप्पटीनें गुणावें. हा गुणाकार खंडांच्या घनांच्या बेरजेंत मिळवावा म्हणजे इष्ट घन मिळतो.

एखाद्या वर्गसंख्येचा घन करणें असल्यास त्या संख्येच्या वर्गमूळाचा घन करून त्या घनाचा वर्ग करावा म्हणजे इष्ट संख्येचा घन मिळेल.

स्पष्टीकरण : श्लोक २४ मध्यें सांगितलेली रीत बैजिक नित्यसमीकरण

$(अ+ब)^{३} = अ^{३} + ३अ^{२}ब + ३अब^{२} + ब^{३}$ यावर आधारित आहे. हीच पुढें वाढविली म्हणजे $(अ+ब+क)^{३} = (अ+ब)^{३} + ३(अ+ब)^{२}क + ३(अ+ब)क^{२} + क^{३}$ अशी वापरतां येते. श्लोक २६ च्या प्रथमार्धातील रीत

$(अ+ब)^3 = अ^3 + ब^3 + ३अब(अ+ब)$ या सूत्रावर आधारित आहे. तसेच दुसऱ्या अर्थात $(अ^२)^३ = (अ^३)^२$ हें सूत्र आहे हें समजेलच.

श्लोक २७

> **नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा । कथय पंचघनस्य घनं च मे ॥**
> **घनपदं च ततोऽपि घनात्सखे । यदि घनेऽसि घना भवतो मतिः ॥ २७ ॥**

अर्थ : ९, २७, १२५ या संख्यांचे घन सांग. तसेंच या घनांचीं घनमूळें (घनपदें) काय तें सुद्धां, जर तुझ्या बुद्धीला घनक्रिया समजली असेल तर सांग.

स्पष्टीकरण : नऊचा घन = ९×९×९ = ८१×९ = ७२९.

२७ चा घन पुढीलप्रमाणें मिळेल. (२ अंत्य, ७ आदि)

रीत १

२ चा घन	= २×२×२=८	८
$३ \times अंत्य^२ \times आदि$	= ३× ४×७=८४	८४
$३ \times अंत्य \times आदि^२$	= ३×२×४९=२९४	२९४
$७^३$	= ७×७×७=३४३	३४३
		१९६८३

हे उपगुणाकार स्थानांतर करून लिहून (वर दाखविल्याप्रमाणें एकं स्थान सरकवून बेरीज) केली म्हणजे १९६८३ हा घन आला.

रीत २

२७ चे २ खंड १५ व १२ असे केले.	१४५८०
१५ चा घन =१५×१५×१५=२२५×१५=३३७५	३३७५
१२ चा घन =१२×१२×१२=१४४×१२=१७२८	१७२८
३×२७×१५×१२=८१×१८०=१४५८०.	१९६८३

वरील उपगुणाकारांची बेरीज करून (वर दाखविल्याप्रमाणें) १९६८३ हा घन आला. (यांत एकांतर बदल नाहीं, म्हणजे सरकवणें नाहीं.) १२५ चा घन करतांना त्याचे १२ व ५ हे विभाग पाडावे. (खंड नव्हे).

नंतर $१२^३$	=१७२८	१७२८
$३ \times १२^२ \times ५$	=२१६०	२१६०
$३ \times १२ \times ५^२$	=९००	९००
$५^३$	=१२५	१२५
		१९५३१२५

वरील अंक उजवीकडे दाखविल्याप्रमाणें एकांतर पद्धतीनें म्हणजे एकं स्थान एक घर उजवीकडे सरकवून मांडले. म्हणजे १९५३१२५ हा घन आला. तसेंच $९^३$ पाहिजे असल्यास नवाच्या वर्गमूळाचा म्हणजे ३ चा घन २७ घेऊन २७ चा वर्ग करावा. म्हणजे ७२९ हा नऊचा घन होईल.

प्रकरण ९

घनमूळ काढण्याची रीत

श्लोक २८

आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे । पुनस्तथान्त्याद्घनतो विशोध्य ।।
घनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या । त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजेत् फलं तु ।। २८ ।।

श्लोक २९

पंक्त्यां न्यसेत्तत्कृतिमन्त्य निघ्नीं । त्रिघ्नीं त्यजेत्तत्प्रथमात्फलस्य ।।
घनं तदाद्यात् घनमूलमेवं । पंक्ति भवेदेवमतः पुनश्च ।। २९ ।।

अर्थ : ज्या संख्येचें घनमूळ पाहिजे असेल तिच्या आद्यंकावर म्हणजे उजवीकडील अंकावर एक उभी रेषा काढावी. या स्थानास घनस्थान म्हणतात. त्याच्या डाव्या बाजूचीं दोन स्थानें (दशं व शतं) हीं अघनस्थानें होत. तेथील अंकावर दोन आडव्या खुणा कराव्या. त्यापुढील घनस्थानावर उभी रेघ व नंतर दोन आडव्या रेघा याप्रमाणें अन्त्य म्हणजे डावे बाजूच्या अंकांपर्यंत खुणा करून संख्येचे विभाग पाडावे.

यानंतर डाव्या बाजूच्या प्रथम विभागांतून जो घन वजा जाईल तो वजा द्यावा. नंतर ज्याचा घन वजा दिला तो अंक एकीकडे लिहून त्याच्या वर्गाची तिप्पट करून ठेवावी. नंतर पहिल्या विभागांतून घन वजा दिल्यावर जी बाकी राहाते तीवर पुढल्या विभागांतला एक आंकडा घ्यावा व पूर्वोक्त तिप्पटीनें त्यास भाग पाहावा. (नक्की कितीचा भाग लागतो हें तारतम्यानें ठरवावें). हा अंक पहिल्या घनमूळावर मांडावा. नंतर पूर्वोक्त तिप्पट व हा अंक यांचा गुणाकार दुसऱ्या विभाज्यांतून वजा द्यावा. उरलेल्या बाकीवर दुसऱ्या विभागांतमधलेले अंक घेऊन नवीन भाज्य तयार करावा. नंतर पंक्तीं-तल्या आद्यांकाच्या तिप्पटीनें दुसऱ्या अंकाच्या वर्गास गुणून हा गुणाकार या भाज्यांतून वजा द्यावा व त्यावर दुसऱ्या विभागाचा शेष अंक घेऊन भाज्य तयार करावा व पंक्तींतल्या (घनमूळ) दुसऱ्या अंकाचा घन त्यांतून वजा द्यावा. यानंतर हीच रीत पुनःपुन्हां वापरावी म्हणजे संख्येचें घनमूळ येतें.

स्पष्टीकरण : नवीन अंकगणितांतही हीच रीत वापरलेली आहे. फरक एवढाच कीं नवीन रीतींत विभागाचे तीन आंकडे एकदम घेतात. भास्कराचार्य ते एक, एक असे खंडशः

घेतो. त्यामुळें भाग लावण्याचें काम सुकर होतें. खालीं १९६८३ च घनमूळ काढून दाखविलें आहे.

संख्या १९६८३

पंक्ति २,७	१९६८३
	८
३ × २^{२} × ७ = १२ × ७	११६
	८४
३ × २ × ७ × ७ = २९४	३२८
	२९४
७^{३}	३४३
= ३४३	३४३
	०००

विभाग १९६८३, पहिला विभाग १९, दुसरा ६८३. २ चा घन ८ हा १९ मधून वजा दिला; व बाकी ११ वर दुसऱ्या भागांतला प्रथमांक ६ लिहून ११६ भाज्य तयार केला. नंतर २ च्या वर्गाची तिप्पट १२ हा भाजक घेऊन ११६ स भाग पाहिला. त्यांत ८ व ९ चे भाग लागतात. पण पुढे यांनीं वजाबाकी होणार नाहीं. म्हणून ७ चा भाग लावून पंक्तींत २ पुढे ७ लिहिले. नंतर १२ × ७ = ८४ हे ११६ त वजा दिले.

बाकी ३२ वर ८ घेऊन ३२८ हा पुढील भाज्य केला. नंतर ३ × २ × ७^{२} = २९४ हे ३२८ तून वजा दिले. उरलेल्या ३४ वर पुढील ३ घेऊन ३४३ हा नवीन भाज्य केला. त्यांतून ७ चा घन ३४३ वजा दिला. बाकी शून्य राहिली आणि घनमूळ २७ आलें.

याच पद्धतीनें १९५३१२५ चें घनमूळ काढूं. आकृतीवरून रीत ध्यानीं येईल.

पंक्ति १२५	१९५३१२५
	१
३ × १^{२} × २ = ६	०९
	६
३ × १ × २^{२} = १२	३५
	१२
२^{३} = ८	२३३
	८
३ × १४४ × ५	२२५१
	२१६०
३ × १२ × २५	००९१२
	९००
५^{३} = १२५	१२५
	१२५
	०००

या उदाहरणांत १२५ हें घनमूळ किंवा घनपद आलें. नवीन अंकगणिताच्या पुस्तकांतून वर्गमूळ, घनमूळ काढण्याचे नियम काढूनच टाकले आहेत. वर्गमूळें व घनमूळें हल्लीं लाग्रतमांच्या मदतीनें घेतलीं जातात. किंवा वर्ग, घन वगैरेंचीं कोष्टकपुस्तकेंही मिळतात. भास्कराचार्यांच्या काळीं या सोयी उपलब्ध नव्हत्या. सोबतच्या उदाहरणांवरून दिसून येईल कीं, कमींत कमी आंकडेमोड करून उत्तर सत्वर काढतां येते. हल्लींच्या रीतींत हा सुलभपणा नाहीं.

भिन्नपरिकर्माष्टक (अपूर्णांकावरील आठ कृत्यें)

भागजाति

श्लोक ३०

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ । राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।।
मिथो हराभ्यामपवर्तिताभ्याम् । यद्वा हरांशौ सुधियात्र गुण्यौ ।।३०।।

अर्थ : ज्या अपूर्णांकाचे अंश व छेद पूर्णांक असतात अशा अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांक म्हणतात. अशा दोन अपूर्णांकांची बेरीज करणें असल्यास किंवा वजाबाकी करणें असल्यास त्यास प्रथम समच्छेद रूप द्यावें. म्हणजे एका अपूर्णांकाच्या छेदानें दुसऱ्याच्या अंश व छेदास गुणावें. तसेंच दुसऱ्याच्या छेदानें पहिल्याच्या अंश व छेदास गुणावें. होणारे अपूर्णांक समच्छेद होतील. हीच रीत दोहोंपेक्षां जास्त अपूर्णांकांस लागू पडेल.

किंवा दोन्ही अपूर्णांकांच्या छेदास त्यांच्या समाईक अवयवानें भागावें; व येणाऱ्या भागाकारांनीं तदितर अपूर्णांकांच्या अंश व छेदास गुणावें. शहाण्यानें असें गुणल्यास समच्छेदरूप मिळेल.

उदाहरणें

श्लोक ३१

रूपत्रयं पंचलवस्त्रिभागो । योगार्थमेतान्वद तुल्यहारान् ।
त्रिषष्टिभागश्च चतुर्दशांशः । समच्छिदौ मित्र वियोजनार्थम् ।।३१।।

अर्थ : $\frac{३}{१}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३}$ यांची बेरीज सांग, तसेंच $\frac{१}{६३}$ व $\frac{१}{१४}$ यांची वजाबाकी सांग.

स्पष्टीकरण : पहिल्या रीतीनें प्रथम अंशास व छेदास ५ × ३ यांनीं, दुसऱ्या अपूर्णांकांच्या अंश व छेदास १ × ३ यांनीं व तिसऱ्या अपूर्णांकांच्या अंश व छेदास १ × ५ यांनीं गुणून समच्छेदरूप द्यावें.

उदा. १ लें

∴ $\frac{४५}{१५} + \frac{१}{१५} + \frac{५}{१५}$ असें रूप झालें. आतां अंशांचीं बेरीज करून $\frac{५३}{१५}$ हें रूप आलें. प्रथम $\frac{३}{१} + \frac{१}{५}$ ची बेरीज केली असती तर ती $\frac{१५}{५} + \frac{१}{५} = \frac{१६}{५}$ आली असती व पुन्हां $\frac{१६}{५} + \frac{१}{३} = \frac{४८}{१५} + \frac{५}{१५} = \frac{५३}{१५}$ अशी बेरीज झाली असती.

उदा. २ रें

तसेंच $\frac{१}{१४} - \frac{१}{६३}$ यांत छेदांचा समाईक अवयव ७ आहे. त्यानें १४ व ६३ यांस भागिल्यास अनुक्रमें २ व ९ येतात. म्हणून प्रथम अपूर्णांकास ९ नें वर, खालीं गुणून व दुसऱ्यास २ नें वर, खालीं गुणून $\frac{९}{१२६} - \frac{२}{१२६} = \frac{७}{१२६}$ आले. आतां ७ नें वर, खालीं भागून $\frac{१}{१८}$ हें उत्तर आलें.

वाचकांच्या लक्षांत येईल कीं पहिल्या उदाहरणांत १५ हा १,३,५ चा ल. सा. वि. आहे, व दुसऱ्यांत ६३,१४ यांचा ल. सा. वि. १२६ आहे. पहिल्या उदाहरणांत १,३,५ यांत समाईक अवयव नाहीं. दुसऱ्यांत ६३,१४ यांना सात हा दृढभाजक आहे.

श्लोक ३२

प्रभागजाति

लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना। । भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ।।३२।।

अर्थ : अनेक भागजाति अपूर्णांकांचा गुणाकार करणें असेल तर अंशांचा गुणाकार करून त्यास छेदांच्या गुणाकारानें भागावें व संक्षिप्त रूप द्यावें म्हणजे एकच भागजाति अपूर्णांक तयार होतो, त्यास सवर्णन म्हणतात.

स्पष्टीकरण : हा एक 'चे'चाच प्रकार आहे. भागजाति अपूर्णांकाचा हिस्सा भागजाति अपूर्णांकच असतो.

उदाहरण

श्लोक ३३

द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य सुमते पादत्रयं यद्भवेत् ।
तत्पंचांशकषोडशांशचरणः संप्रार्थितेनार्थिने ।
दत्तो येन वराटकाः कति कदर्येणार्पितास्तेन मे ।
ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि वत्स गणिते जातिं प्रभागाभिधाम् ।।३३।।

अर्थ : एका कवडीचुंबक माणसानें एका भिक्षेकऱ्यास १ द्रम्माचा

$\frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{१६} \times \frac{१}{४}$ विभाग इतकें द्रव्य दिलें. तर हे वत्सा, तूं जर प्रभागजाति अपूर्णांक जाणत असशील तर किती द्रव्य दिलें तें सांग.

स्पष्टीकरण : रीतीप्रमाणें अंशांचा गुणाकार ६ व छेदांचा गुणाकार ७६९० झाला.
सवर्णन $\frac{६}{७६८०} = \frac{१}{१२८०}$ द्रम्म = १ कवडी हें उत्तर.

कृपणानें भिक्षेकऱ्यास केवळ एकच कवडी दिली. यापेक्षां कमी किंमतीचें नाणें देणेंच शक्य नाहीं म्हणून १ कवडी दिली. भास्कराचार्यांची विनोदबुद्धि येथें दिसून येते.

भागानुबंध भागापवाह

श्लोक ३४

छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णम् । एकस्यभागा अधिकोनकाश्चेत् ।।
स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र । भागानुबंधे च लवापवाहे ।।
तलस्थ हारेण हरं निहन्यात् । स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान् ।। ३४ ।।

रीत १

अर्थ : ज्या संख्यें‍त एक भाग पूर्णांक (रूप) व दुसरा भाग एकाचा कांहीं हिस्सा अधिक असतो, अशा अपूर्णांकास भागानुबंध अपूर्णांक म्हणतात. हिस्सा उणें असल्यास भागापवाह अपूर्णांक म्हणतात. अशा अपूर्णांकास सरळरूप देण्यासाठीं, अपूर्णांक भागाच्या छेदानें पूर्णांक भागास गुणून (भागानुबंध असल्यास) त्यांत अंश मिळवावा किंवा (भागापवाह असल्यास) वजा करावा व पूर्वोक्त छेदानें भागावें.

स्पष्टीकरण : $७ + \frac{२}{३}$ हा भागानुबंध अपूर्णांक. हल्लीं आपण $७\frac{२}{३}$ असेंही लिहितों. $७ - \frac{२}{३}$ हा भागापवाह अपूर्णांक. पहिल्यास सरळरूप दिले म्हणजे $\frac{२१+२}{३} = \frac{२३}{३}$ हा भागजाति म्हणजे सरळ अपूर्णांक तयार झाला. $७ - \frac{२}{३} = \frac{२१-२}{३} = \frac{१९}{३}$ हा भागापवाह झाला. हल्लींच्या नवीन गणितांत गुणोत्तरीय अपूर्णांक (Rational fractions) लागतात. त्याची व्याख्या अशी. जर अ, ब हे पूर्णांक असतील तर $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ हा अपूर्णांक गुणोत्तरीय असतो; (**ब** शून्य नको). हाच भास्कराचार्यांचा भागजाति अपूर्णांक.

रीत २

अर्थ : ज्यावेळीं एखाद्या अपूर्णांक राशींत त्याच राशीचा कांहीं हिस्सा मिळविणें असेल त्यावेळीं हिश्शाच्या छेदानें मूळ अपूर्णांकाच्या छेदास गुणावें व आलेला गुणाकार छेदस्थानीं लिहावा. नंतर भागानुबंध हवा असल्यास हिश्शाच्या अंश व छेदांच्या बेरजेनें मूळ राशीच्या अंशास गुणून तो गुणाकार अंशस्थानीं लिहून संक्षेप द्यावा. भागापवाह हवा असल्यास हिश्शाच्या छेदांतून अंश वजा करून बाकीनें मूळ राशीच्या अंशास गुणावें व तो गुणाकार अंशस्थानीं लिहून संक्षेप द्यावा.

उदाहरणार्थ $\frac{१}{५}$ या संख्यें‍त त्याचा $\frac{१}{७}$ मिळवा. भास्करीय पद्धतीनें $\frac{१}{५}$ च्या खाली $\frac{१}{७}$ (तल) लिहा. गुणाकार ५ × ७ हा एका रेषेखालीं $\overline{३५}$ असा लिहा. नंतर तलाच्या

अंश छेदांची बेरीज ७ + १ = ८ यांनी $\frac{१}{५}$ चा अंश १ यास गुणून ८ येतील त्यास ३५ नें भागा म्हणजे $\frac{८}{३५}$ हें उत्तर. नवीन पद्धतींत $\frac{१}{५} + \frac{१}{५} \times \frac{१}{७} = \frac{१}{५} + \frac{१}{३५} = \frac{८}{३५}$.
तसेच $\frac{१}{५}$ मधून त्याचा $\frac{२}{७}$ हिस्सा वजा करणें असल्यास $\frac{(७ - २) \times १}{३५} = \frac{५}{३५} = \frac{१}{७}$.
नवीन पद्धतींत $\frac{१}{५} - \frac{१}{५} \times \frac{२}{७} = \frac{७ - २}{३५} = \frac{५}{३५} = \frac{१}{७}$.

श्लोक ३५

> **सांघ्रिद्वयं त्रयं व्यंघ्रि कीदृक् ब्रूहि सवर्णितम् ।**
> **जानास्यंशानुबंधं चेत्तथा भागापवाहनम् ।। ३५ ।।**

श्लोक ३६

> **अंघ्रिः स्वत्र्यंशयुक्तः स निजदलयुतः कीदृशः कीदृशौ द्वौ ।**
> **त्र्यंशौ स्वाष्टांशहीनौ तदनु च रहितौ स्वत्रिभिः सप्तभागैः ।।**
> **अर्धं स्वाष्टांशहीनं नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः ।**
> **कीदृक्स्यात्ब्रूहि वेत्सि त्वमिह यदि सखेंऽशानुबंधापवाहौ ।। ३६ ।।**

अर्थ : हे मित्रा, जर तुला स्वांशानुबंध व स्वांशापवाह अपूर्णांक ठाऊक असतील (राशि आणि राश्यंश याची बेरीज, वजाबाकी) तर, $२\frac{१}{४}$ (अंघ्रि)* व त्याचप्रमाणें $३ - \frac{१}{४}$ यांना सरळरूप देऊन काय किंमती होतील ते सांग.
तसेंच, $\frac{१}{४}$ या राशींत त्याचाच तृतीयांश मिळवून बेरीज किती ?
$\frac{१}{३}$ मध्यें त्याचाच $\frac{१}{२}$ मिळवून किमत काय ?
$\frac{२}{३}$ मध्यें त्याचाच आठवा हिस्सा वजा दिल्यास शेष काय राहील ?
या शेषांतून त्याचा $\frac{३}{७}$ वजा दिल्यास बाकी काय ?
$\frac{१}{२}$ मधून त्याचा अष्टमांश वजा केल्यास काय बाकी राहील ?
याच बाकींत तिचा $\frac{९}{७}$ मिळविल्यास बेरीज काय ?

स्पष्टीकरण : $२\frac{१}{४} = \frac{९}{४}$. $३ - \frac{१}{४} = \frac{१२ - १}{४} = \frac{११}{४}$, हें उत्तर.

उदा. ३ तल $\left.\begin{matrix}\frac{१}{४}\\ \frac{१}{३}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(३ + १) \times १}{४ \times ३} = \frac{४}{१२} = \frac{१}{३}$, हें उत्तर.

उदा. ४ तल $\left.\begin{matrix}\frac{१}{३}\\ \frac{१}{२}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(२ + १) \times १}{३ \times २} = \frac{३}{६} = \frac{१}{२}$, हें उत्तर.

उदा. ५ तल $\left.\begin{matrix}\frac{२}{३}\\ \frac{१}{८}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(८ - १) \times २}{३ \times ८} = \frac{१४}{२४} = \frac{७}{१२}$, हें उत्तर.

उदा. ६ तल $\left.\begin{matrix}\frac{७}{१२}\\ \frac{३}{७}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(७ - ३) \times ७}{८४} = \frac{२८}{८४} = \frac{१}{३}$, हें उत्तर.

---

* परिशिष्ट २ पहा.

उदा. ७ तल $\left.\begin{matrix}\frac{१}{२}\\ \frac{१}{८}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(८-१)\times १}{२\times ८} = \frac{७}{१६}$, हें उत्तर.

उदा. ८ तल $\left.\begin{matrix}\frac{७}{१६}\\ \frac{९}{७}\end{matrix}\right\} \therefore \frac{(७+९)\times ७}{१६\times ७} = \frac{११२}{११२} = १$, हें उत्तर.

वरील उदाहरणांत अंघ्रि $= \frac{१}{४}$ हा शब्द आला आहे. (त्यासाठी परिशिष्ट २ पहा.)

प्रकरण ११

संकलित व्यवकलित (अपूर्णांकांची बेरीज वजाबाकी)

श्लोक ३७

योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः ॥ ३७ ॥

अर्थ : व्यवहारी अपूर्णांकांची बेरीज, वजाबाकी करणें असल्यास प्रथम त्यास समच्छेदरूप द्यावें. यांत एखादी संख्या पूर्णांक असेल तर तिचा छेद १ (रूप) समजावा. नंतर अंशांची बेरीज किंवा वजाबाकी करून तिला समच्छेदाइतका छेद द्यावा.

स्पष्टीकरण : $\frac{५}{१३} + \frac{७}{३} + ४ = \frac{५}{१३} + \frac{७}{३} + \frac{४}{१} = \frac{१५+९१+१५६}{३९} = \frac{२६२}{३९}$. ही रीत आधुनिक रीतीप्रमाणेंच आहे.

उदाहरण १

श्लोक ३८

पंचांशपादत्रिलवार्धषष्ठान् । एकीकृतान्ब्रूहि सखे ममैतान् ॥
एभिश्च भागैरथ वर्जितानाम् । किं स्यात्त्रयाणां कथयाऽऽशु शेषम् ॥३८॥

अर्थ : $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ व $\frac{१}{६}$ यांची बेरीज सांग. हे मित्रा, यांच्या बेरजेस ३ मधून वजा दिले तर बाकी काय राहील ?

स्पष्टीकरण : येथें छेदांचा ल. सा. वि. ६० हा समच्छेद करून
$\frac{१}{५} + \frac{१}{४} + \frac{१}{३} + \frac{१}{२} + \frac{१}{६} = \frac{१२+१५+२०+३०+१०}{६०} = \frac{८७}{६०} = \frac{२९}{२०}$.
आणि $३ - \frac{२९}{२०} = \frac{६०-२९}{२०} = \frac{३१}{२०}$ बाकी.

उदाहरण २

सूत्र : **अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता । लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥ ३८ अ ॥**

अर्थ : अपूर्णांकांचा गुणाकार करणें असल्यास अंशांच्या गुणाकारास छेदांच्या गुणाकारानें भागावें.

प्रकरण १२

गुणाकार

श्लोक ३९

> **सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं । स सप्तमांशं द्वितयं भवेत् किम् ।।**
> **अर्धं त्रिभागेण हतं च विद्धि । दक्षोऽसि भिन्ने गणनाविधौ चेत् ।। ३९ ।।**

अर्थ : $२\frac{१}{३}$ नें $२\frac{१}{७}$ ला गुणल्यास गुणाकार काय ? $\frac{१}{३}$ ला $\frac{१}{२}$ नें गुणल्यास गुणाकार काय ?

स्पष्टीकरण : पहिल्यांत $\frac{७}{३} \times \frac{१५}{७} = ५$. दुसऱ्यांत $\frac{१}{३} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{६}$.

प्रकरण १३

भागाकाराचा नियम

श्लोक ४०

> **छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः ।**
> **कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च ।। ४० ।।**

अर्थ : व्यवहारी अपूर्णांकांचा भागाकार करणें असल्यास भाजक अपूर्णांकाचे अंश व छेद उलट करून त्या अपूर्णांकानें अंशांतील अपूर्णांकास गुणावें.

उदाहरण

श्लोक ४१

> **सत्र्यंशरूपद्वितयेन पंच । त्र्यंशेन षष्ठं वद मे विभज्य ।।**
> **दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिः । चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था ।। ४१ ।।**

अर्थ : हे मित्रा, जर तुझी बुद्धि दर्भाच्या गर्भाच्या (आंतील कुश किंवा पातें) टोंकाइतकी तीक्ष्ण असेल तर $२\frac{१}{३}$ नें ५ स भागून भागाकार काय येईल तें सांग. तसेच $\frac{१}{३}$ ने $\frac{१}{६}$ स भागल्यास भागाकार काय येईल तें सांग.

स्पष्टीकरण : $५ \div २\frac{१}{३} = \frac{५}{१} \times \frac{३}{७} = \frac{१५}{७}$, हें उत्तर.

$\frac{१}{६} \div \frac{१}{३} = \frac{१}{६} \times \frac{३}{१} = \frac{३}{६} = \frac{१}{२}$, हें उत्तर.

येथें हृति म्हणजे भागाकार. दर्भाचा गर्भ म्हणजे मऊ भाग. हा धार्मिक कार्यांत वापरतात.

प्रकरण १४

अपूर्णांकांचे वर्ग व घन, वर्गमूळें व घनमूळें

श्लोक ४२

वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ ।
हारांशयोरथ पदे च पदप्रसिद्धचै ।। ४२ ।।

अर्थ : व्यवहारी अपूर्णांकांचे वर्ग, घन, वर्गमूळें व घनमूळें करणें असल्यास, अंशाच्या वर्गादिकास छेदाच्या वर्गादिकानें भागावें.

स्पष्टीकरण : $\left(\frac{७}{३}\right)^{२} = \frac{७}{३} \times \frac{७}{३} = \frac{४९}{९}$. तसेंच $\frac{८१}{१६}$ चें वर्गमूळ $\frac{९}{४}$.
(पदप्रसिद्धचै म्हणजे मळ काढण्यासाठीं.)

उदाहरण

श्लोक ४३

सार्धत्रयाणां कथयाशु वर्गं । वर्गात्ततो वर्गपदं च मित्र ।।
घनं च मूलं च घनात्ततोऽपि । जानासि चेत् वर्गघनौ विभिन्नौ ।। ४३ ।।

अर्थ : $३\frac{१}{२}$ या संख्येचा वर्ग, त्या वर्गाचें वर्गमूळ, तसेंच घन आणि त्या घनाचें घनमूळ हीं, जर तुला अपूर्णांकांचे वर्गादि करतां येत असतील तर मित्रा, मला चटकन सांग.

स्पष्टीकरण : $\left(३\frac{१}{२}\right)^{२} = \left(\frac{७}{२}\right)^{२} = \frac{४९}{४}$.

$$\sqrt{\frac{४९}{४}} = \frac{\sqrt{४९}}{\sqrt{४}} = \frac{७}{२}.$$

$$\left(३\frac{१}{२}\right)^{३} = \left(\frac{७}{२}\right)^{३} = \frac{७^{३}}{२^{३}} = \frac{३४३}{८}.$$

$$\sqrt[३]{\frac{३४३}{८}} = \frac{\sqrt[३]{३४३}}{\sqrt[३]{८}} = \frac{७}{२}.$$

वाचकांच्या लक्षांत येईल कीं भास्करीय कालीं वर्ग, घन यांसाठीं घातांक चिन्ह वापरांत नव्हतें. तसेंच वर्गमूळ, घनमूळ वगैरे करितां पदचिन्ह (radical sign) अर्थातच नव्हतें.

प्रकरण १५

शून्यासंबंधीं आठ कृत्यें

श्लोक ४४.

> योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ।
> ख हरस्यात् खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥ ४४ ॥

श्लोक ४५

> शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः ।
> अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः ॥ ४५ ॥

अर्थ : शून्य एखाद्या संख्येंत मिळविल्यास त्या संख्येएवढीच बेरीज होते. शून्याचा वर्ग, घन वर्गमूळ, घनमूळ हीं सर्व शून्यच होतात. शून्यानें एखाद्या संख्येस भागिलें असतां $\frac{\text{संख्या}}{0}$ इतकी किमत होते. शून्यानें कोठल्याही संख्येस गुणलें तर गुणाकार शून्य होतो. एखाद्या राशींतून शून्यगुणित राशी वजा करणें असेल तर शून्यानें गुणल्यामुळें किमत शून्य झाली आहे हें लक्षांत ठेवावें. शून्यानें भाग दिलेल्या संख्येस पुन्हां शून्यानें गुणल्यास पूर्वीच्या संख्येएवढाच (अविकृत) गुणाकार येतो. त्याचप्रमाणें शून्य मिळविलें अथवा वजा केलें तरी मूळ संख्या बदलत नाहीं.

स्पष्टीकरण : शून्यासंबंधीच्या वरील नियमांत शून्यानें भागण्याचा भास्करीय नियम अत्यंत अस्पष्ट आहे. उदाहरणार्थ ११ या संख्येस शून्याचा भाग दिला तर भागाकार $\frac{११}{०}$ इतका येतो असें भास्कराचार्य म्हणतो. भागाकार अनंत* येतो असेंही तो म्हणत नाहीं. भागक्रिया छेद अशून्य असतांनाच करतां येते, इतर वेळीं नाहीं असेंही तो म्हणत नाहीं. आधुनिक गणितांत शून्यानें भाग देणें हें अव्याख्येय आहे असें ठरविलें आहे. गणित शास्त्राच्या अनेक आज्ञांपैकीं 'Thou shalt not divide by zero' म्हणजे 'शून्यानें तूं भागूं नको' ही एक महत्त्वाची आज्ञा आहे. भास्कराचार्यांनाही ती अर्थातच ठाऊक होती म्हणून त्याचे उत्तर त्यानी $\frac{११}{०}$ अशा अनिर्णीत स्वरूपांत दिलें. तसेंच शून्याच्या संदर्भांत एखादी संख्या शून्यहर स्वरूपांत असून तिला शून्यानें गुणल्यास भागाकार अंशाएवढा येतो असें आचार्य म्हणतात तेंही युक्त नाहीं. कारण $\frac{११}{०} \times ० = ११$ च होतील असें खात्रीपूर्वक सांगतां येणार नाहीं. $\frac{११}{०} \times ० = ११ \times \frac{०}{०}$. यांत $\frac{०}{०}$ या अपूर्णांकाची निश्चित किमत असत नाहीं.
त्याला (indeterminate) अनिश्चित किमत असते.
म्हणून अशून्य ÷ शून्य व शून्य ÷ शून्य या दोन्ही मूल्यें भागाकारांची भास्कराचार्य नीट देत नाहीं.

---

* अनंत = ∞, परंतु हा शब्द लीलावतींत नाहीं.

उदाहरण

श्लोक ४५ अ

> खं पंचयुग्भवति किं वद खस्य वर्गं । मूलं घनं घनपदं खगुणाश्च पंच ।।
> खेनोद्धृता दश च कः खगुणो निजार्ध- ।
> युक्तस्त्रिभिश्च गुणितः खहृतस्त्रिषष्टिः ।। ४५ अ ।।

अर्थ : (१) शून्यांत ५ मिळविले तर बेरीज काय ? (२) शून्याचा वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ काय होतात ? (३) शून्य व ५ यांचा गुणाकार काय ? (४) १० ला ० नें भागलें असता भागाकार काय ? (५) अशी कोणती संख्या आहे कीं तिला शून्यानें गुणून तिच्यांत तिचा अर्ध मिळविला व येणाऱ्या बेरजेस ३ नें गुणून ० नें भागलें तर उत्तर ६३ येतें ?

स्पष्टीकरण : उत्तरें :– (१) $० + ५ = ५$, (२) $०^२ = ०$, $\sqrt{०} = ०$, $०^३ = ०$, $\sqrt[३]{०} = ०$, (३) $० \times ५ = ०$, (४) $\frac{१०}{०} = \infty$ (अनंत)

शेवटच्या (५ व्या) प्रश्नांत जर **क्ष** ही अज्ञातराशि असेल, तर

$$\frac{\left(क्ष \times ० + \frac{क्ष \times ०}{२}\right) \times ३}{०} = ६३.$$

$$म्हणजेच\ \frac{९\ क्ष \times ०}{२ \times ०} = ६३ \therefore ९\ क्ष \times ० = १२६ \times ०.$$

$\therefore$ शून्यानें भागून, $९\ क्ष = १२६$, $क्ष = १४$.

आधुनिक गणितांत समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस सामान्य अवयव शून्य असेल तर त्याचा संक्षेप देता येत नाहीं.

प्रकरण १६

विलोम किंवा व्यस्तविधि

श्लोक ४६

> छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ।
> ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्यात् दृश्ये राशिप्रसिद्धये ।। ४६ ।।
> अथ स्वांशाधिकोने तु लवाढ्योनो हरो हरः
> अंशस्त्वविकृतस्तत्र विलोमे शेषमुक्तवत् ।। ४७ ।।

अर्थ : विलोम किंवा उलट क्रिया करतांना जी दृश्य म्हणजे दिलेली राशि असेल, तिजपासून मूळ राशि साध्य करण्यास, भाजक असेल तो गुणक करावा, गुणक असेल तो भाजक करावा, वर्ग असेल तेथे वर्गमूळ घ्यावें, वर्गमूळ असेल तेथें वर्ग घ्यावा, (पद = वर्गमूळ) वजा असेल तें अधिक करावें, अधिक असेल तें वजा करावें. याप्रमाणें व्यस्त क्रिया कराव्या. तसेंच एखाद्या राशींत तिचा अंश मिळविलेला अगर वजा दिलेला असून दृश्य राशि होत असेल तर अंशाचा निदर्शक अपूर्णांक $\frac{\text{अंश}}{\text{अंश}+\text{छेद}}$ किंवा $\frac{\text{अंश}}{\text{छेद}-\text{अंश}}$ अशा स्वरूपांत घेऊन त्यानें दृश्यास विलोम क्रिया करावी. अर्थात् दृश्यास या अपूर्णांकानें गुणावें म्हणजे स्वांश येतो. तो वजा द्यावा अथवा मिळवावा म्हणजे मूळ राशि येते.

स्पष्टीकरण : उदाहरणानें हें अधिक स्पष्ट होईल. एका संख्येंत १० मिळविले. येणाऱ्या बेरजेच्या $\frac{२}{५}$ मधून ४ वजा देऊन १२ उरतात. तर संख्या काय ? विलोमक्रियेनें $१२+४=१६$, $१६ \div \frac{२}{५} = ४०$, $४०-१० = ३०$ हें उत्तर.

तसेंच एका राशींत तिचा $\frac{3}{८}$ मिळवून ३३ येतात, तर ती राशि काय ?
हिस्सा अपूर्णांक $\frac{3}{८}$. ३३ ला $\frac{3}{८+3}$ यानें गुणून स्वांश ९. $३३-९ = २४$ हें उत्तर.
किंवा राशींतून तिचा $\frac{3}{८}$ वजा दिल्यास १५ येतात. तर राशि काय ?
पूर्वीप्रमाणें $\frac{3}{८-3} = \frac{3}{५}$.
$१५ \times \frac{3}{५} = ९$ हा स्वांश.
$१५ + ९ = २४$ हें उत्तर.

उदाहरण

श्लोक ४८

यस्त्रिघ्नस्त्रिभिरन्वितः स्वचरणैर्भक्तस्ततः सप्तभिः ।
स्वत्र्यंशेन विवर्जितः स्वगुणितो हीनो द्विपंचाशता ।।
तन्मूलेऽष्टयुते हृते च दशभिर्जातं द्वयं ब्रूहि तं ।
राशिं वेत्सि हि चंचलाक्षि विमलां बाले विलोमक्रियां ।। ४८ ।।

अर्थ : एका संख्येला ३ नें गुणलें. त्यांत तिचा $\frac{3}{४}$ मिळविला. येणाऱ्या बेरजेस ७ नें भागलें. भागाकारांतून त्याचा $\frac{१}{३}$ वजा केला. बाकीचा वर्ग करून त्यांतून ५२ वजा केले. उरलेल्याचें वर्गमूळ घेऊन त्यांत ८ मिळविलें. नंतर १० नें भागलें तेव्हां भागाकार २ आला. तर हे चंचल नेत्रांच्या मुली, तूं जर व्यस्तक्रिया जाणत असशील तर, मूळ संख्या काय ते सांग.

स्पष्टीकरण : विलोमक्रियेनें, १० नें भागण्यापूर्वी दृश्य $१० \times २ = २०$
,, ८ मिळविण्यापूर्वी ,, $२०-८ = १२$
,, वर्गमूळ घेण्यापूर्वी ,, $१२^२ = १४४$
,, ५२ वजा करण्यापूर्वी ,, $१४४+५२ = १९६$

विलोम क्रियेनें वर्ग करण्यापूर्वी दृश्य $\sqrt{१९६} = १४$

" $\frac{१}{३}$ हिस्सा वजा देण्यापूर्वी " $१४ + १४ \times \frac{१}{३-१} = २१$

" ७ नें भाग देण्यापूर्वी " $२१ \times ७ = १४७$.

" $\frac{३}{४}$ भाग मिळविण्यापूर्वी " $१४७ - १४७ \times \frac{३}{७} = ८४$.

" ३ नें गुणण्यापूर्वी " $८४ \div ३ = २८$ हें उत्तर.

बैजिक दृष्टचा उपान्त्य समीकरण **क्ष** − **क्ष** × $\frac{३}{७}$ = ८४. तर **क्ष** किती ?
याचें उत्तर **क्ष** × $\frac{७-३}{७}$ = ८४ ∴ **क्ष** = ८४ × $\frac{७}{४}$ = १४७ असें मिळेल.

भास्कराचार्य **क्ष** + **क्ष** × $\frac{३}{४}$ = १४७ घेतो.
येथेंही **क्ष** × ($\frac{७}{४}$) = १४७ अथवा **क्ष** = १४७ × $\frac{४}{७}$
∴ **क्ष** = ८४ येतात. म्हणून इष्टसंख्या = $\frac{८४}{३}$ = २८

प्रकरण १७

इष्ट कर्म (दृष्ट राशि दिल्यास)

श्लोक ४९

उद्देशकालापवदिष्टराशिः । क्षुण्णो हृतोंऽशै रहितो युतो वा ।।
इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं । राशिर्भवेत्प्रोक्तमितीष्टकर्म ।। ४९ ।।

अर्थ : प्रथम एखादी इष्ट संख्या कल्पून तिजवर उदाहरणांत दिल्याप्रमाणें गुणणें, भागणें अंशाचा योग करणें, वियोग करणें, या क्रिया कराव्या. दृश्य संख्येस इष्ट संख्येनें गुणून त्या गुणाकारास येणाऱ्या फलानें भागावें; म्हणजे मूळ संख्या मिळते. ह्यालाच इष्टकर्म म्हणतात.

उदाहरण

श्लोक ५०

पंचघ्न : स्वत्रिभागोनो दशभक्तः समन्वितः ।
राशित्र्यंशार्धपादैः स्यात्को राशिर्द्व्यूनसप्ततिः ।। ५० ।।

अर्थ : एका संख्येस पांचनें गुणून, गुणाकाराचा $\frac{१}{३}$ वजा केला व वजाबाकीस १० नें भागलें. नंतर भागाकारांत मूळ राशीचे $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$ मिळवून ६८ झाल्यास, मूळ संख्या काय ?

स्पष्टीकरण : समजा ३ ही मूळ किंवा इष्ट संख्या असेल तर

$३ \times ५ = १५;\ १५ - १५ \times \frac{१}{३} = १०,\ १० \div १० = १.$

$१ + ३ \times \frac{१}{२} + ३ \times \frac{१}{३} + ३ \times \frac{१}{४} = \frac{१२+१८+१२+९}{१२} = \frac{५१}{१२} = \frac{१७}{४}.$



कळपांतील हत्ती

(संदर्भ–श्लोक ५१, पृष्ठ ३३)

आतां दृश्य ६८, $\therefore \ \frac{६८ \times ३}{\frac{१७}{४}} = \frac{६८}{१७} \times १२ = ४८$ हें उत्तर.

या इष्टकर्म रीतींत मूळ संख्येचे हिस्सेच मिळवावे अगर वजा करावे लागतात. पट किंवा हिस्सा कसाही केला तरी चालतो. उदाहरणार्थ, एका संख्येच्या ५ पटींतून १५ वजा केले व बाकीस ५ नें भागलें तर भागाकार २९ येतो. तर ती संख्या कोणती ? येथें इष्टकर्मानें उत्तर येणार नाहीं. कारण इष्टसंख्या १० धरून

$१० \times ५ = ५०, ५० - १५ = ३५, \frac{३५}{५} = ७$. दृश्य २९. $\therefore \frac{२९ \times १०}{७}$ हें उत्तर.

पण $३२ \times ५ = १६०, \ १६० - १५ = १४५, \ \frac{१४५}{५} = २९$.

$\therefore$ खरें उत्तर ३२. येथें उत्तर चुकण्याचें कारण आपण १५ ही संख्याच वजा केली. ३२ चा हिस्सा वजा केला नाहीं.

उदाहरण १

श्लोक ५१

यूथार्धं सत्रिभागं वनविवरगतं कुंजराणां च दृष्टम् ।
षड्भागश्चैव नद्यां पिबति च सलिलं सप्तमांशेन मिश्रः ।।
पद्मिन्यां चाष्टमांशः स्वनवमसहितः क्रीडते सानुरागो ।
नागेन्द्रो हस्तिनीभिस्तिसृभिरनुगतः का भवेद्यूथसंख्या ।। ५१ ।।

अर्थ : एक हत्तींचा कळप होता. त्यापैकीं अर्धे व अर्ध्याचा तिसरा हिस्सा इतके एका गुहेंत गेले. कळपाच्या $\frac{१}{६}$ व $\frac{१}{६}$ चा $\frac{१}{७}$ इतके नदीवर पाणी पीत होते. $\frac{१}{८}$ व $\frac{१}{८}$ चा $\frac{१}{९}$ इतके हत्ती कमळांनीं भरलेल्या सरोवरांत क्रीडा करीत होते. आणि प्रेमी नागेंद्र पुढें व तीन हत्तिणी त्याच्या मागोमाग, असा खेळ चालला होता. तर कळपांत हत्ती किती ?

स्पष्टीकरण : शेवटी शिल्लक हत्ती ४ हें दृश्य. आतां इष्ट संख्या १ धरल्यास

$१ - (\frac{१}{२} + \frac{१}{२} \times \frac{१}{३}) - (\frac{१}{६} + \frac{१}{६} \times \frac{१}{७}) - (\frac{१}{८} + \frac{१}{८} \times \frac{१}{९})$ एवढा हिस्सा $= ४$.

सोडवून $१ - \frac{२}{३} - \frac{४}{२१} - \frac{५}{३६} = \frac{२५२ - १६८ - ४८ - ३५}{२५२} = \frac{२५२ - २५१}{२५२} = \frac{१}{२५२}$.

आता दृश्य ४. $\therefore \frac{४ \times इष्ट \ १}{\frac{१}{२५२}} = ४ \times २५२ = १००८$ हत्ती हें उत्तर.

उदाहरण २

श्लोक ५२

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपंचांशषष्ठैः ।
त्रिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ।।
गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपद्मैः ।
सकलकमलसंख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ।। ५२ ।।

अर्थ : कमळांच्या एका राशींत कांहीं कमळें होतीं. त्यांतली $\frac{1}{3}$ शंकरास वाहिलीं, $\frac{1}{5}$ कमळें विष्णूस वाहिलीं, $\frac{1}{6}$ कमळें सूर्यास वाहिलीं, $\frac{1}{4}$ कमळें देवीस अर्पण केली; व राहिलेल्या ६ कमळांनीं गुरुचरणांची पूजा केली. तर कमळें किती होतीं हें झटकन् सांग.

स्पष्टीकरण : समजा कमळांची संख्या १ धरली. तर

$$१ - \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{४} \right) \text{ इतका कमळांचा हिस्सा} = \text{दृश्य} = ६.$$

$$१ - \frac{४०+२४+२०+३०}{१२०} = १ - \frac{११४}{१२०} = \frac{६}{१२०} = \frac{१}{२०}. \text{ इष्ट} = १.$$

$$\therefore \text{ कमळांची संख्या} = \frac{६ \times १}{\frac{१}{२०}} = १२० \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण ३

श्लोक ५३

हारस्तारस्तरुण्या निधुवनकलहे मौक्तिकानां विशीर्णः ।
भूमौ यातस्त्रिभागः शयनतलगतः पंचमांशोऽस्य दृष्टः ।।
प्राप्तः षष्ठः सुकेश्या गणक दशमकः संगृहीतः प्रियेण ।
दृष्टं षट्कं च सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्तिकैरेष हारः ।। ५३ ।।

अर्थ : रतिकलह करीत असतां एका तरुणीच्या गळ्यांतील मोत्यांचा हार तुटला. त्यांतले $\frac{1}{3}$ मोती घरंगळून जमिनीवर पडले. $\frac{1}{5}$ मोतीं बिछान्याच्या खालीं गेले. तरुणीनें त्यांतले $\frac{1}{6}$ गोळा केले. प्रियकरानें $\frac{1}{10}$ गोळा केले. आणि उरलेले ६ मोतीं हाराच्या सूत्रांत अडकून राहिले. तर हारांत मोती किती तें सांग.

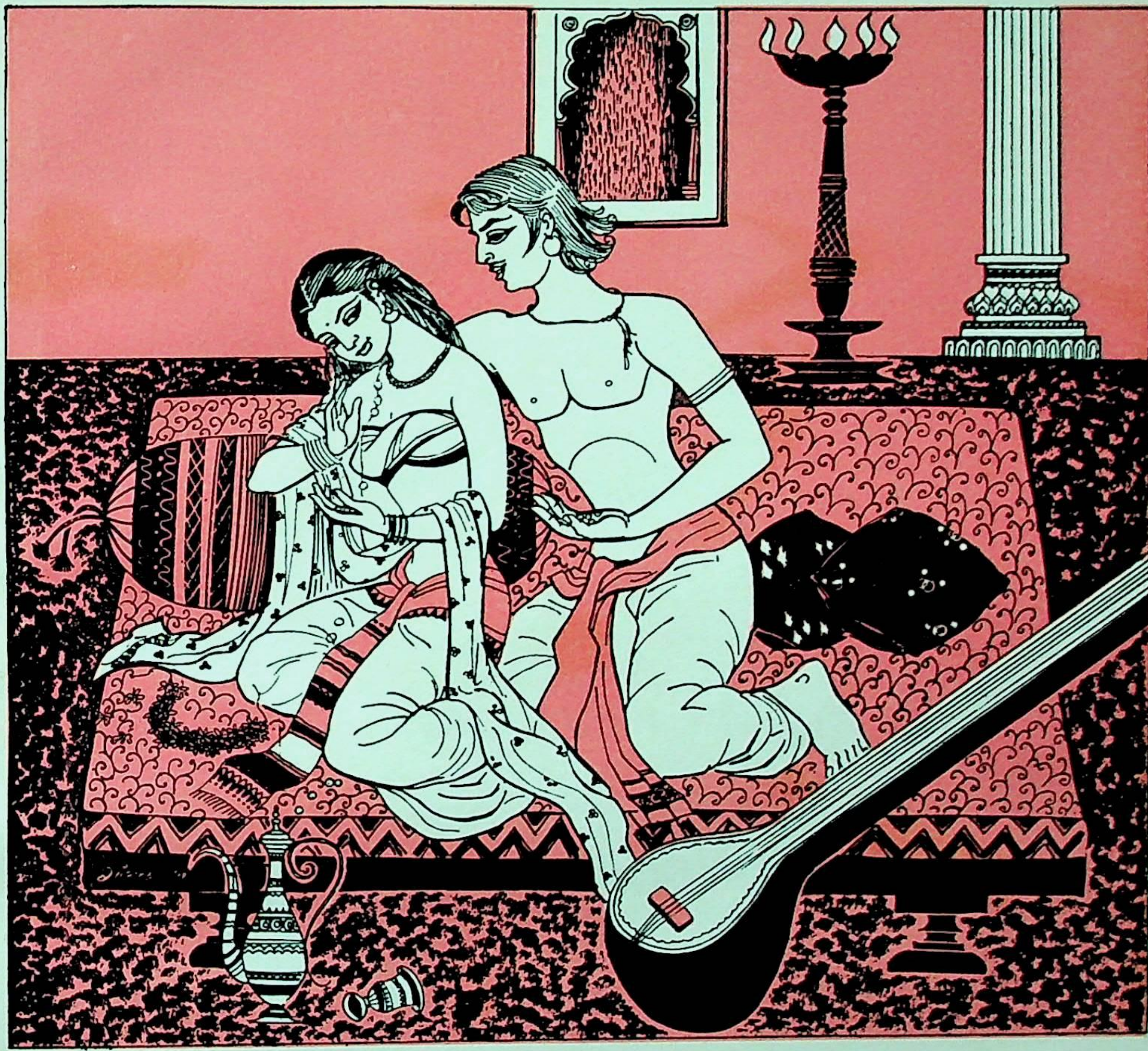
स्पष्टीकरण : समजा मोत्यांची संख्या १ धरली. दृश्य राशि ६ आहे.

$$१ - \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{१०} \right) \text{ इतका हाराचा हिस्सा} = ६ \text{ मोती.}$$

$$\text{इष्टकर्मानें } १ - \frac{२०+१२+१०+६}{६०} = \frac{६०-४८}{६०} = \frac{१२}{६०} = \frac{१}{५}.$$

$$\therefore \frac{६ \times १}{\frac{१}{५}} = ३० \text{ मोतीं हें उत्तर.}$$

या उदाहरणावरून दिसतें कीं अंकगणिताच्या उदाहरणाला सुरतक्रीडेचे वावडें नव्हतें. तथापि लीलावती भास्कराचार्यांची मुलगी असलीच तर तिला हा प्रश्न त्यानें विचारावयास नको होता. पण शृंगाररसाचा तो भोक्ता होता हें या श्लोकावरून दिसतें. तसेंच हा प्रश्न लीलावतीलाच विचारला असेल तर कन्येपेक्षां ती त्याची स्त्री असण्याचा संभव अधिक. श्लोकांत प्रिय म्हणजे पति असा अर्थ घ्यावा.



तुटलेली मुक्तामाला

(संदर्भ–श्लोक ५३, पृष्ठ ३४)

रतिसमयीं तरुणीची मुक्तामाला तुटोनि ओघळली. भूवरि त्र्यंश पसरली, पंचांश तशी सुमंचकी गळली.
अंश सहावा तिचिया हाति, प्रियकरें दशांश ओंजळली. सूत्रीं सहा लटकलीं, सांग किती मोंति हारिं माळविली ?

उदाहरण ४

श्लोक ५४

षड्भागः पाटलीषु भ्रमरनिकरतः स्वत्रिभागः कदम्बे ।
पादश्चूतद्रुमे च प्रदलितकुसुमे चंपके पंचमांशः ॥
प्रोत्फुल्लांभोजखंडे रविकरदलिते त्रिंशदंशोऽभिरम्ये ।
तत्रैको मत्तभृंगो भ्रमति वद सखे का भवेद्भृंगसंख्या ॥ ५४ ॥

अर्थ : हे मित्रा, भुंग्याच्या एक कळपांतील $\frac{१}{६}$ भुंगे पाटलीच्या फुलांत (लाल लोध्र वृक्ष) शिरले, तिसरा हिस्सा भुंगे कदंब वृक्षावर गेले. चौथा हिस्सा आंब्याच्या झाडावर उडाले. $\frac{१}{५}$ भुंगे उमललेल्या फुलांनीं प्रफुल्लित अशा चांफ्याच्या झाडावर गेले. तसेंच सूर्यकिरणांनीं विकसित झालेल्या व अभिरम्य अशा कमलखंडांत $\frac{१}{३०}$ भुंगे शिरले. आणि १ भुंगा केवळ घिरटया घालीत राहिला. तर एकंदर भुंगे किती ?

स्पष्टीकरण : येथें दृश्य राशि १ आहे. समजा कमळांत १ च भुंगा आहे. तर

$१ - \left(\frac{१}{६}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+\frac{१}{३०} \right)$ इतका कळपाचा हिस्सा = १.

$\therefore \frac{१}{१} - \frac{१०+२०+१५+१२+२}{६०} = १ - \frac{५९}{६०} = \frac{१}{६०}.$

इष्टकर्म रीतीनें, कळपांतील भुंगे = $\frac{\text{दृश्य } १ \times \text{ इष्ट } १}{\frac{१}{६०}}$ = ६० हें उत्तर.

उदाहरण ५ (शेषजाति प्रकार)

श्लोक ५५

स्वार्धं प्रादात्प्रयागे नवलवयुगलं योऽवशेषाच्च काश्याम् ।
शेषांघ्रि शुल्कहेतोः पथि दशमलवान्षट् च शेषाद् गयायाम् ॥
शिष्टा निष्कत्रिषष्टिर्निजगृहमनया तीर्थपांथः प्रयातः ।
तस्य द्रव्यप्रमाणं वद यदि भवता शेषजातिः श्रुताऽस्ति ॥ ५५ ॥

अर्थ : एक तीर्थयात्रा करणारा पांथस्थ प्रयागला गेला. आपल्या द्रव्यापैकीं निम्में द्रव्य त्यानें तेथें (ब्राह्मणांना) दिलें. उरलेल्याचा $\frac{२}{९}$ हिस्सा काशींत खर्च केला. उरलेल्याचा $\frac{१}{४}$ भाग जकांत दिली. बाकीच्या $\frac{६}{१०}$ विभाग त्यानें गया येथें खर्च केला. शेवटीं त्याजजवळ ६३ निष्क राहिले. ते घेऊन पांथस्थ घरीं आला. तर, शेषजाति तुला ठाऊक असल्यास, निघतांना पांथस्थाजवळ किती द्रव्य होतें तें सांग.

स्पष्टीकरण : दृश्य राशि ६३. समजा त्याजजवळ १ निष्क होता. तर

प्रयागांत $\frac{१}{२}$ खर्च, $\frac{१}{२}$ शिल्लक. काशींत $\frac{१}{२} \times \frac{२}{९}$ खर्च, = $\frac{१}{९}$.

काशींत शिल्लक $\frac{१}{२} - \frac{१}{९} = \frac{७}{१८}$. याच्या $\frac{१}{४}$ जकात. ∴ जकात = $\frac{७}{७२}$

काशीतील अखेरची शिल्लक = $\frac{७}{१८} - \frac{७}{७२} = \frac{२१}{७२}$.

गयेंत खर्च $\frac{२१}{७२} \times \frac{६}{१०} = \frac{२१}{१२०} = \frac{७}{४०}$.

गयेंतून निघाल्यावर शिल्लक $\frac{७}{२४} - \frac{७}{४०} = \frac{७\times(५-३)}{१२०} = \frac{७}{६०}$.

म्हणून शेषजाति रीतीनें, द्रव्य = $\frac{६३\times१}{\frac{७}{६०}} = \frac{६३\times६०}{७}$ = ५४० निष्क हें उत्तर.

उदाहरण ५ अ

श्लोक ५५ अ

लोलाक्ष्या प्रियनिर्मिता वसुलवा भूषा ललाटेऽर्पिता ।
यच्छिष्टास्त्रिगुणाद्रिभागकलिता न्यस्ता कुचान्तःस्रजि ।
शिष्टार्धं भुजनालयोर्मणिगणः शेषाब्धिकस्त्र्याहतः ।
कांच्यात्मा मणिराशिमाशु वद मे वेण्यां हि यत्षोडश ।। ५५ अ ।।

अर्थ : एका प्रियकरानें आपल्या प्रेयसीला अलंकार करण्यासाठीं कांहीं रत्नें दिलीं. त्यांतल्या $\frac{१}{८}$ रत्नांचा दागिना करून तिनें तो आपल्या भालप्रदेशीं घातला, उरलेल्या रत्नांच्या $\frac{३}{७}$ विभागाची एक माळ करून तिनें आपल्या स्तनांच्या मध्यप्रदेशीं ठेवली. उरलेल्या रत्नांच्या $\frac{१}{२}$ रत्नांचे बाजूबंद (दंडपट्टा) बनवून तिनें ते आपल्या दंडावर बसविले. उरलेल्याच्या $\frac{३}{४}$ रत्नांतून तिनें किंकिणीयुक्त कमरपट्टा बनविला. आणि १६ रत्नें तिनें आपल्या वेणींत माळली. तर एकंदर रत्नें किती तें झटकन् सांग.

स्पष्टीकरण : $\frac{१}{८}$ रत्नांचा दागिना भालप्रदेशीं घातला. उरले $\frac{७}{८}$.

$\frac{७}{८} \times \frac{३}{७} = \frac{३}{८}$ मोत्यांचा किंवा रत्नांचा हार केला. उरले $\frac{७}{८} - \frac{३}{८} = \frac{४}{८}$.

$\frac{४}{८} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{४}$ मोत्यांचे बाजूबंद केले. उरले $\frac{१}{२} - \frac{१}{४} = \frac{१}{४}$.

$\frac{१}{४} \times \frac{३}{४} = \frac{३}{१६}$ रत्नांचा कमरपट्टा बनविला. उरले $\frac{१}{४} - \frac{३}{१६} = \frac{१}{१६}$.

∴ $\frac{१}{१६}$ हिस्सा = १६ रत्नें. अर्थात् एकूण रत्नें १६ × १६ = २५६.

(यांतले शब्द : भुजनाल = दंड, अब्धिक = चतुर्थांश, कांची = कमरपट्टा.)

उदाहरण ६ विश्लेषजाति

श्लोक ५६

पंचांशोऽलिकुलात्कदंबमगमत्त्र्यंशं शिलीन्ध्रं तयोः ।
विश्लेषत्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ।।

कान्ते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया– ।
दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृंगोऽलिसंख्यां वद ।।५६।।

अर्थ : हे मृगनयने प्रिये, एक भुंग्यांचा समूह होता. त्यांतले $\frac{१}{५}$ कदंबवृक्षावर गेले. $\frac{१}{३}$ शिलीन्ध्र वृक्षावर गेले. तसेंच $(\frac{१}{३} - \frac{१}{५}) \times ३$ इतके भ्रमर कुटज वृक्षावर घोटाळत होते. आणि, एक भुंगा, केतकी व मालती या वेलींच्या सुवासानें मोहित होऊन इकडून तिकडे व तिकडून इकडे असा आकाशांतून फेरे घालीत होता. तर एकंदर भुंगे किती ? (तिसऱ्या ओळींत एक सुंदर उत्प्रेक्षा आहे. तिचें वर्णन असें– मालती व केतकीचीं बनें आहेत. दोहोंचा परिमल एकसमयावच्छेदेंकरून येत आहे. वायुरूपी दूत हा सुगंध वाहून नेऊन भुंग्यास देत आहे. कोणता सुवास घ्यावा हे निश्चित न झाल्यानें भुंगा जणूं काय एकदां केतकीच्या झाडाकडे तर दुसऱ्यांदा मालतीच्या वेलीकडे असा भटकत आहे).

स्पष्टीकरण : येथें दृश्य १. समजा इष्ट संख्या १ धरली. तर

$\{ १ - (\frac{१}{५} + \frac{१}{३}) - (\frac{१}{३} - \frac{१}{५}) \times ३ \}$ एवढ्या हिश्शाबरोबर १.

$\therefore १ - \frac{८}{१५} - \frac{६}{१५} = \frac{१}{१५}$. **म्हणून** इष्टकर्मरीतीनें,

भ्रमरसंख्या $\frac{१ \times १}{\frac{१}{१५}} = १५$. हें उत्तर.

प्रकरण १८

संक्रमण

श्लोक ५७

योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धितस्तौ । राशी स्मृतं संक्रमणाख्यमेतत् ।।५७।।

अर्थ : दोन संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी दिली असतां त्या संख्या काढणें असल्यास, बेरीज आणि वजाबाकी यांची बेरीज व वजाबाकी करून त्यांचे अर्ध घ्यावे म्हणजे संख्या मिळतात. या गणितास संक्रमण म्हणतात.

स्पष्टीकरण : बीजगणितांतल्या युगपत् समीकरणांचाच हा एक प्रकार आहे.

जर **अ** व **ब** हीं दोन अव्यक्तें **अ + ब = क** व **अ – ब = ड** यांनीं

संबंधित असतील तर $अ = \frac{क + ड}{२}$, $ब = \frac{क - ड}{२}$. यांत **क, ड** ज्ञात आहेत.

श्लोक ५८

यथायोगः शतं सैकं वियोगः पंचविंशतिः ।
तौ राशी वद मे वत्स वेत्सि संक्रमणं यदि ॥ ५८ ॥

अर्थ : हे वत्सा, जर तुला संक्रमण विधि ठाऊक असेल तर, ज्या संख्यांची बेरीज १०१ आणि वजाबाकी २५ आहे, त्या संख्या सांग.

स्पष्टीकरण : रीतीप्रमाणें, मोठी संख्या $\frac{१०१+२५}{२} = \frac{१२६}{२} = ६३$,
लहान संख्या $\frac{१०१-२५}{२} = \frac{७६}{२} = ३८$.

प्रकरण १९

राशींचे वर्गांतर व वियोग दिला असतां. (वर्ग संक्रमण) (भाग १)

श्लोक ५९

वर्गांतरं राशिवियोगभक्तं । योगस्ततः प्रोक्तवदेव राशी ॥ ५९ ॥

अर्थ : वर्गांतरास संख्यांच्या फरकानें भागलें असतां संख्यांची बेरीज मिळते. नंतर संक्रमण रीत बेरीज, वजाबाकीस लावून संख्या मिळतात.

स्पष्टीकरण : बीजगणितांत, $अ^२ - ब^२ = (अ + ब)(अ - ब)$,

$$\therefore \frac{अ^२ - ब^२}{अ - ब} = अ + ब.$$

अर्थात् अ − ब तसेंच अ + ब मिळाले म्हणजे अ आणि ब स्वतंत्रपणें संक्रमण रीतीनें मिळतात.

उदाहरण

श्लोक ६०

राश्योर्ययोर्वियोगोऽष्टौ तत्कृत्योश्च चतुःशती ।
विवरं वद तौ राशी शीघ्रं गणितकोविद ॥ ६० ॥

अर्थ : दोन संख्यांचें अंतर ८ आहे व वर्गांतर ४०० आहे, तर त्या संख्या कोणत्या तें, हे गणितकोविदा, सांग.

स्पष्टीकरण : $\frac{४००}{८} = ५०$. $अ + ब = ५०$. $अ - ब = ८$

$\therefore अ = \frac{५०+८}{२} = २९$, $ब = \frac{५०-८}{२} = २१$. २९ व २१ हें उत्तर.

वर्गकर्म (भाग २)

श्लोक ६१

> इष्टकृतिरष्टगुणिता व्यका दलिता विभाजितेष्टेन ।
> एक: स्यादस्य कृतिर्दलिता सैका परो राशिः ।। ६१ ।।

श्लोक ६१ अ

> रूपं द्विगुणेष्टहृतं सेष्टं प्रथमोऽथवापरो रूपं ।
> कृतियुतिवियुतो व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः ।। ६१ अ ।।

अर्थ : श्लोक ६१अ मधील दुसऱ्या ओळींत प्रश्न दिला आहे तो असा.
अशा दोन संख्या सांगा कीं ज्यांच्या वर्गांच्या वेरजेंतून १ वजा दिला तर बाकी पूर्णवर्ग उरेल. तसेंच वर्गांच्या वजाबाकींतून १ वजा दिला तरीही बाकी पूर्णवर्ग उरेल.

रीत १ ली (श्लोक ६१) : कोठलाहि अंक घ्या. त्याच्या वर्गाच्या आठ पटींतून १ वजा करून बाकीस अंकाच्या दुपटीनें भागा. (इष्टांक = घेतलेला अंक) ही पहिली संख्या. नंतर पहिल्या संख्येचा वर्ग अर्धा करून त्यांत एक मिळवा. येणारी राशि ही दुसरी संख्या.

रीत २ री (श्लोक ६१ अ पूर्वार्ध) : कोठलाहि अंक घेऊन त्याच्या दुपटीनें एकास भागावें व येणाऱ्या संख्येंत तो अंक मिळवावा म्हणजे पहिली राशि येते. दुसरी राशि १ हीच समजावी. म्हणजे वर्गयोग − १ = वर्ग, व वर्गांतर − १ = वर्ग होईल.

रीत १

स्पष्टीकरण : या दोहोंतील पहिली रीत क्लिष्ट आहे. तिचें बैजिक स्पष्टीकरण पुढीलप्रमाणें.

समजा **क्ष** इष्टांक धरला. तर प्रथम राशि $\frac{८क्ष^२ - १}{२क्ष}$ इतकी झाली. हिला **अ** म्हणूं.

$\therefore$ अ $= \frac{८क्ष^२ - १}{२क्ष}$. दुसरी राशि **ब**, **अ** वरून मिळते. **ब** $= \frac{अ^२}{२} + १$.

आतां $अ^२ + ब^२ - १ = अ^२ + \frac{अ^४}{४} + अ^२ + १ - १ = \frac{अ^४}{४} + २अ^२$

$$= \frac{अ^४}{४}(अ^२ + ८) = \frac{(८क्ष^२ - १)^२}{१६क्ष^२} \times \left\{ \frac{६४क्ष^४ - १६क्ष^२ + १ + ३२क्ष^२}{४क्ष^२} \right\}$$

$$= \frac{(८क्ष^२ - १)^२ (८क्ष^२ + १)^२}{६४क्ष^४} = \left\{ \frac{६४क्ष^४ - १}{८क्ष^२} \right\}^२.$$

$\therefore$ अ^{२} + ब^{२} − १ ही राशि $\dfrac{६४क्ष^{४} - १}{८क्ष^{२}}$ याचा वर्ग झाली.

तसेंच ब^{२} − अ^{२} − १ (अ पेक्षां **ब** मोठा)

$$= \frac{अ^{२}}{४} + अ^{२} + १ - अ^{२} - १ = \left(\frac{अ^{२}}{२} \right)^{२}$$

म्हणून, वर्गयोग − १ = वर्ग, वर्गवियोग − १ = वर्ग असे झाले.

या सूत्रावरील भाष्यांत **क्ष** ची किंमत दिली असतां अनुक्रमें, **अ**, **ब**, अ^{२} + ब^{२} − १ व ब^{२} − अ^{२} − १ या किंमती सांगतां येतात. पण वर्गयोग − १ व वर्गांतर − १ हे संपूर्ण वर्ग असतां **क्ष** कसा काढावा याचें विवेचन भास्कराचार्यांच्या बीजगणितांत पहावें. थोडक्यांत निष्कर्ष या प्रकरणाच्या शेवटीं पहावा.

रीत २

समजा **क्ष** हा इष्टांक घेतला. तर $\dfrac{१}{२क्ष}$ + **क्ष** ही १ राशि. व १ हा अंक

हीच दुसरी राशि. $\therefore$ अ $= \dfrac{१ + २क्ष^{२}}{२क्ष}$, **ब** = १,

$$अ^{२} + ब^{२} - १ = \left(\frac{१ + २क्ष^{२}}{२क्ष} \right)^{२} + १ - १ = \left(\frac{१ + २क्ष^{२}}{२क्ष} \right)^{२}.$$

$$अ^{२} - ब^{२} - १ = \frac{१ + ४क्ष^{४} + ४क्ष^{२} - ८क्ष^{२}}{४क्ष^{२}} = \left(\frac{१ - २क्ष^{२}}{२क्ष} \right)^{२}.$$

दुसरी रीत पहिलीपेक्षां सोपी आहे.

जर **क्ष** = १, तर अ = $\frac{७}{२}$, **ब** = $\frac{५७}{८}$, अ^{२} + ब^{२} − १ = $\left(\frac{६३}{८}\right)^{२}$,
ब^{२} − अ^{२} − १ = $\left(\frac{४९}{४}\right)^{२}$

जर **क्ष** = २, तर अ = $\frac{३१}{४}$, **ब** = $\frac{९९३}{३२}$, ब^{२} − अ^{२} − १ = $\left(\frac{९६१}{३२}\right)^{२}$.
ब^{२} + अ^{२} − १ = $\left(\frac{१०२३}{३२}\right)^{२}$

वाचकांनीं **क्ष** = ३, **क्ष** = ४ या किंमती घालून सूत्राची सत्यता पडताळून पहावी.

दुसऱ्या रीतींत इष्टांक **क्ष** = १, तर अ = $\frac{३}{२}$ आणि **ब** = १.

$\therefore$ अ^{२} + ब^{२} − १ = $\frac{९}{४}$ + १ − १ = $\frac{९}{४}$ (वर्गसंख्या)

अ^{२} − ब^{२} − १ = $\frac{९}{४}$ − २ = $\frac{१}{४}$ (,,)

जर **क्ष** = ३ तर अ = $\frac{१९}{६}$ आणि **ब** = १.

$\therefore$ अ^{२} + ब^{२} − १ = $\left(\frac{१९}{६}\right)^{२}$ + १ − १ = $\left(\frac{१९}{६}\right)^{२}$ ही वर्गसंख्या

आणि अ^{२} − ब^{२} − १ = $\frac{३६१}{३६}$ − २ = $\frac{३६१ - ७२}{३६}$ = $\frac{२८९}{३६}$ = $\left(\frac{१७}{६}\right)^{२}$.

टीप : वर सांगितलेला प्रश्न वाढवून,

$अ^{२} + ब^{२} - क^{२} =$ वर्ग, व $अ^{२} - ब^{२} - क^{२} =$ वर्ग, असाही सोडवितां येईल. येथें अर्थात् उद्देश $क = १$ धरून सोडविणें असा आहे.

उदाहरण

श्लोक ६२

राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके ।
मूलप्रदे प्रवद तौ मम मित्र यत्र ।।
क्लिश्यंति बीजगणिते पटवोऽपि मूढाः ।
षोढोक्तगूढगणितं परिभावयन्तः ।। ६२ ।।

अर्थ : ज्या संख्यांचा एकोन वर्गयोग वर्ग असतो, तसेंच एकोन वर्गांतरही वर्ग असतें अशा दोन संख्या सांग. हे मित्रा, या प्रश्नांत सहा प्रकारच्या बैजिक (गूढगणिताच्या) रीती ज्यांना ठाऊक आहेत असे हुशार गणिती देखील घोटाळतात, (तर मग इतरांची काय कथा !)

स्पष्टीकरण : पहिल्या रीतीनें, इष्टांक $\frac{१}{२}$ कल्पून $अ = \frac{\frac{१}{४} \times ८ - १}{२ \times \frac{१}{२}} = १,$

$ब = \frac{अ^{२}}{२} + १ = \frac{३}{२}. \quad \therefore \; १, \frac{३}{२}$ ह्या त्या दोन संख्या होत.

दुसऱ्या रीतीनें. येथें इष्टांक $= १$ कल्पून, $अ = \frac{१}{१ \times २} + १ = \frac{३}{२}$ आणि $ब = १.$ अर्थात् $१, \frac{३}{२}$ ह्या त्या दोन संख्या होत. फक्त इष्टांक अपूर्ण कां घेतला हें समजत नाहीं.

उदाहरण

श्लोक ६३

इष्टस्य वर्गवर्गो घनश्च तावष्टसंगुणौ प्रथमः ।
सैको राशी स्यातां, एवं व्यक्तेऽथवाऽव्यक्ते ।। ६३ ।।

अर्थ : एक इष्ट संख्या घेऊन तिच्या चतुर्थघाताच्या आठ पटींत १ मिळवावा म्हणजे पहिली राशि. तसेंच घनाची आठपट ही द्वितीय राशि.

स्पष्टीकरण : समजा क्ष हा इष्टांक घेतला,

तर $८\,क्ष^{४} + १$ ही पहिली संख्या व $८\,क्ष^{३}$ ही दुसरी संख्या. एकोन वर्गयोग :

$(८ क्ष^४ + १)^२ + ६४ क्ष^६ - १ = ६४क्ष^८ + १६ क्ष^४ + १ + ६४ क्ष^६ - १$

$= १६क्ष^४ (४ क्ष^४ + ४ क्ष^२ + १) = १६क्ष^४ (२क्ष^२ + १)^२ =$ वर्ग.

तसेंच $(८ क्ष^४ + १)^२ - ६४ क्ष^६ - १$

$= ६४ क्ष^८ + १६ क्ष^४ + १ - ६४ क्ष^६ - १$

$= १६ क्ष^४ (४ क्ष^४ - ४ क्ष^२ + १) = १६ क्ष^४ (२ क्ष^२ - १)^२ =$ वर्ग.

सूत्राची उपपत्ति पुढीलप्रमाणें. जर अ+१ आणि **ब** अशा संख्या घेतल्या

तर $(अ + १)^२ + ब^२ - १ = अ^२ + २अ + ब^२$ हा संपूर्ण वर्ग पाहिजे.

तसेंच $(अ + १)^२ - ब^२ - १ = अ^२ + २अ - ब^२$ हाहि संपूर्ण वर्ग पाहिजे.

जर $२अ = न^२$ घातले व, $ब^२$ यासाठीं २ **अन**, लिहिले, तर

$अ^२ + २अ + ब^२ = अ^२ + २अन + न^२ =$ वर्ग होईल, तसेंच

$अ^२ + २अ - ब^२ = अ^२ - २अन + न^२ =$ वर्ग होईल.

यासाठीं $ब^२ = २अन = न^३$ आणि $न = ४क्ष^२$ तर $ब^२ = ६४क्ष^६$ झाला. आणि $ब = ८ क्ष^३$.

तसेंच $२ अ = न^२ \therefore अ = \frac{न^२}{२} = \frac{१६}{२} क्ष^४ = ८ क्ष^४$

$\therefore अ + १ = ८ क्ष^४ + १$, हे सूत्र सिद्ध झालें.

श्लोक ६४

पाटीसूत्रोपमं बीजं गूढमित्येव भासते ।
नास्ति गूढममूढानां नैव षोढेत्यनेकधा ॥ ६४ ॥

अर्थ : अंकगणितांतील सूत्रांप्रमाणें बीजगणितांतील सूत्रेंहि गूढ वाटतात. पण कुशाग्र माणसांना गूढ असें कांहींच नसतें. त्यांना सहा प्रकारच्या काय किंवा अनेक प्रकारच्या काय, सर्व रीती सोप्याच वाटतात.

श्लोक ६५

अस्ति त्रैराशिकं पाटी बीजं च विमला मतिः ।
किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते ॥ ६५ ॥

अर्थ : अंकगणितांत त्रैराशिक हें मूळ आहे. बीजगणितांत स्वच्छ बुद्धि ही मूळ आहे. सुबुद्धि लोकांस कांहींहि अगम्य नाहीं, तथापि मंदबुद्धि लोकांसाठीं सांगावें लागतें.

पहिल्या रींतीची उपपत्ति– समजा प्रथम राशि **ब** व द्वितीय राशि **अ**$+१$ धरली.

तर $(अ+१)^२ - ब^२ - १ = अ^२ + २अ - ब^२$.

यांत $२अ = ब^२$ घेतल्यास वरील संख्येची किंमत $अ^२$ म्हणजेच संपूर्ण वर्ग झाली. आतां $(अ+१)^२ + ब^२ - १$, म्हणजेच, $अ^२ + २अ + ब^२$ हा देखील संपूर्ण वर्ग होणें जरूर आहे.

$\therefore अ = \frac{ब^२}{२}$ धरून $\frac{ब^४}{४} + २ ब^२$ म्हणजेच $\frac{ब^२}{४}(ब^२ + ८)$ हाही संपूर्ण वर्ग पाहिजे.

यांतला पहिला अवयव $\frac{ब^२}{४}$ हा वर्ग आहेच. फक्त $ब^२ + ८$ हा संपूर्ण वर्ग झाला पाहिजे.

त्यावरून **ब** ही संख्या $२ट - \frac{१}{ट}$ अशा रूपाची असल्याशिवाय चालणार नाहीं

$$कारण\ ८ + \left(२ट - \frac{१}{ट}\right)^२ = ४ट^२ - ४ + \frac{१}{ट^२} + ८$$

$$= ४ट^२ + ४ + \frac{१}{ट^२} = \left(२ट + \frac{१}{ट}\right)^२.$$

$\therefore$ जर $ब = ४क्ष - \frac{१}{२क्ष}\left(ट = २क्ष\ समजून\right)$ म्हणजेच $\frac{८क्ष^२ - १}{२क्ष}$ धरले

तर $ब = \frac{८क्ष^२ - १}{२क्ष}$ ही प्रथम राशि व $अ + १ = \frac{ब^२}{२} + १$ ही द्वितीय राशि.

प्रकरण २०

गुणकर्म (वर्गमूळास गुणक असतां राशि काढणें)

श्लोक ६६

गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्धकृत्या ।।
मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्टराशिः ।। ६६ ।।

अर्थ : एखाद्या वर्ग-संख्येंत त्याच्या वर्गमूळाची कांहीं पट मिळवून अथवा वजा केली असतां येणारी राशि (दृष्ट) दिली असेल तर ती खालील रींतीनें मिळते. वर्गमूळाच्या गुणकाच्या अर्ध्याचा वर्ग दृश्य संख्येंत मिळवावा व त्याचें वर्गमूळ घ्यावें. जर मूळ वर्ग-मूळाची पट वर्गांत उणें असेल तर नवीन वर्गमूळांत गुणकार्ध मिळवावा; अधिक असेल तर वजा द्यावा. राहिलेल्याचा वर्ग ही वर्गसंख्या.

श्लोक ६७

यदा लवैश्चोनयुतः स राशिरेकेन भागोनयुतेन भक्त्वा ।।
दृश्यं तथा मूलगुणं च ताभ्यां साध्यस्ततः प्रोक्तवदेव राशिः ।। ६७।।

अर्थ : ज्यावेळेस एखादी वर्गसंख्या त्याच्याच कांहीं हिश्शानें युत किंवा वियुत असेल तेव्हा १ + हिस्सा किंवा एक − हिस्सा या अपूर्णांकानें वर्गमूळाच्या पटीस व दृश्य संख्येस भागावें व नंतर पूर्वी सांगितलेली क्रिया करावी.

स्पष्टीकरण : ही रीत अव्यक्तवर्ग-समीकरणाचीच आहे. फक्त तिचें रूप $क्ष^{२} \pm \textbf{अक्ष} = $ दृश्य या स्वरूपाचें आहे. अर्थात $\frac{अ^{२}}{४}$ इतके दोन्ही बाजूंत मिळवून $\left(क्ष \pm \frac{अ}{२}\right)^{२} = क + \frac{अ^{२}}{४}$.

येथें **क** ही दृश्य संख्या धन समजली आहे. आतां $क + \frac{अ^{२}}{४}$ संपूर्ण वर्ग असेल,

(समजा $प^{२}$), तर $क्ष \pm \frac{अ}{२} = प$. $\therefore क्ष = प \mp \frac{अ}{२}$ अशी क्ष ची किंमत होईल आणि $क्ष^{२}$ ही राशि मिळेल. वर्ग समीकरणाचें (quadratic equation) सामान्य स्वरूप $अक्ष^{२} + बक्ष + क = ०$ असें असतें. येथें $क्ष^{२}$ याचा गुणक १ धरून त्याचे रूप $क्ष^{२} \pm बक्ष = क$ असें केलें. **क** अधिक घेतला व $क + \frac{अ^{२}}{४}$ या संख्येचे वर्गमूळही धन घेतलें. पूर्व काळीं वर्गमूळ फक्त धन घेण्याची प्रथा होती. हल्ली $\sqrt{१६} = \pm ४$ असें आपण मानतों. तसेंच वरील रीतींत **क्ष** देखील अधिक पाहिजे. $\therefore प - \frac{अ}{२}$ हेही अधिक पाहिजेत.

दुसऱ्या रीतींतील श्लोकांत जर $\frac{१}{न}$ इतका वर्गाचा हिस्सा त्यांतून वजा केला असेल तर समीकरण $क्ष^{२} - \frac{१}{न} क्ष^{२} \pm अक्ष = क$ (दृश्य) असें होईल.

$\therefore क्ष^{२} \left(\frac{न - १}{न}\right) \pm अक्ष = क.$ $\therefore क्ष^{२} \pm \frac{अक्ष \times न}{न - १} = \frac{कन}{न - १}$ असें होईल.

यालाच वरील रीत लागेल व $क्ष^{२}$ मिळेल.

भास्कराचार्य $क्ष^{२}$ हेंच अव्यक्त घेतो. नवीन वर्ग-समीकरणांत क्ष हे अव्यक्त धरलें जातें.

उदाहरण १

श्लोक ६८

बाले मरालकुलमूलदलानि सप्त ।
तीरे विलासभरमन्थरगान्यपश्यम् ।।
कुर्वच्च केलिकलहं कलहंसयुग्मम् ।
शेषं जले वद मरालकुलप्रमाणम् ।। ६८ ।।

अर्थ : एका सरोवराच्या कांठावर हंस समूह होता. त्याच्या वर्गमूळाच्या अर्ध्याची सातपट इतके हंस तीरावर क्रीडा करीत असतां मंदगतीनें फिरत होते. आणि एक कलहंसाचें जोडपें पाण्यांत रतिक्रीडा करण्यांत गुंग होतें. तर समूहांत हंस किती ?

स्पष्टीकरण : वर्गसमीकरण असें. $क्ष^२ - \frac{७}{२}क्ष = २$,

$$\therefore \quad क्ष^२ - \frac{७}{२}क्ष + \frac{४९}{१६} = २ + \frac{४९}{१६} = \frac{८१}{१६},$$

$$\therefore \quad क्ष - \frac{७}{४} = \frac{९}{४} \quad \therefore क्ष = \frac{९}{४} + \frac{७}{४} = \frac{१६}{४} = ४. \quad \therefore क्ष^२ = १६.$$

उदाहरण २

श्लोक ६९

स्वपदैर्नवभिर्युवतं स्याच्चत्वारिंशताधिकम् ।
शतद्वादशकं विद्वन् कः स राशिर्निगद्यताम् ॥ ६९ ॥

अर्थ : अशी एक वर्गराशि आहे, कीं तींत त्याच्या वर्गमूळाची ९ पट मिळविल्यास बेरीज १२४० होते. तर ती संख्या कोणती तें, विद्वन, सांग.

स्पष्टीकरण : येथें वर्गसमीकरण $क्ष^२ + ९\,क्ष = १२४०$ झालें.

रीतीप्रमाणें $\quad क्ष^२ + ९\,क्ष + \frac{८१}{४} = १२४० + \frac{८१}{४} = \frac{५०४१}{४}$

$$\therefore \left(क्ष + \frac{९}{२}\right)^२ = \left(\frac{७१}{२}\right)^२ \quad \therefore क्ष + \frac{९}{२} = \frac{७१}{२}$$

$\therefore क्ष = \frac{६२}{२} = ३१.$ अर्थात त्यावरून $क्ष^२ = ९६१.$

उदाहरण ३

श्लोक ७०

यातं हंसकुलस्य मूलदशकं मेघागमे मानसं
प्रोड्डीय स्थलपद्मिनीवनमगादष्टांशकोंऽभस्तटात् ॥
बाले बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसम् ।
दृष्टं हंसयुगत्रयं च सकलां यूथस्य संख्यां वद ॥ ७० ॥

अर्थ : एक हंस पक्ष्यांचा समूह होता. त्यांतले वर्गमूळाच्या १० पट हंस मेघ आले असतां मानस सरोवरावर गेले. तसेंच समूहाचा आठवा हिस्सा इतके हंस सरोवराच्या कांठावरून स्थलपद्मिनीच्या (*Hibiscus Mutalis* जास्वंद) वनांत उडून गेले. आणि उरलेली हंसांची ३ जोडपीं पाण्यांत रतिक्रीडोत्सुक अशीं हिंडूं लागलीं. तर त्या लहान कमळांनीं शोभिवंत अशा तळ्यांत, हे बाले, समूहांत किती हंस होते ?

स्पष्टीकरण : येथें $क्ष^{२} - १० क्ष - \frac{१}{८} क्ष^{२} = ६.$

$$\therefore \frac{७}{८} क्ष^{२} - १० क्ष = ६. \text{ अर्थात } क्ष^{२} - \frac{८०}{७} क्ष = \frac{४८}{७}$$

$$\therefore \left(क्ष - \frac{४०}{७}\right)^{२} = \frac{४८ \times ७}{४९} + \frac{४०^{२}}{४९} = \frac{१९३६}{४९} = \left(\frac{४४}{७}\right)^{२}.$$

$$\therefore क्ष = \frac{४४}{७} + \frac{४०}{७} = \frac{८४}{७} = १२. \quad \therefore क्ष^{२} = \text{समूह} = १४४ \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण ४

श्लोक ७१

पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणें संदधे ।
तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।।
शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं कार्मुकम् ।
चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ।। ७१ ।।

अर्थ : कर्णाचा वध करण्यासाठीं, रागावलेल्या अर्जुनानें आपल्या धनुष्यावर बाणांचा समूहच स्थापन केला. त्याच्या निम्या बाणांनीं कर्णाचे सर्व बाण छेदून टाकले. वर्गमूळाच्या चौपट बाणांनीं कर्णाचे घोडे ठार मारलें. शल्यास ६ बाणांनीं मारलें. तसेंच रथाचें छत्र, ध्वज, व व कर्णाचें धनुष्य यांचा एक एक बाणांनीं नाश केला. व अखेरीस १ बाण मारून कर्णाचे शिर उडविलें. तर अर्जुनानें किती बाणांचें अनुसंधान केलें ?

स्पष्टीकरण : समजा $क्ष^{२}$ इतके बाण अर्जुनानें सोडले. तर वर्णनाप्रमाणें

$$क्ष^{२} - \frac{क्ष^{२}}{२} - ४ क्ष = ६ + ३ + १ = १०.$$

$$\therefore \frac{१}{२} क्ष^{२} - ४ क्ष = १०. \text{ अर्थात् } क्ष^{२} - ८ क्ष = २०.$$

$$\therefore क्ष^{२} - ८ क्ष + १६ = ३६. \quad \therefore (क्ष - ४)^{२} = ३६,$$

$$क्ष - ४ = ६. \text{ यावरून } क्ष^{२} = १०० \text{ बाण.}$$



कर्णवध

(संदर्भ–श्लोक ७१, पृष्ठ ४६)

उदाहरण ५

श्लोक ७२

> **अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ ।**
> **निखिलनवमभागाश्चालिनी भृंगमेकम् ॥**
> **निशि परिमललुब्ध पद्ममध्ये निरुद्धम् ।**
> **प्रतिरणति रणन्तं ब्रूहि कांतेऽलिसंख्याम् ॥ ७२ ॥**

अर्थ : एका भुंग्याच्या समूहांतले अर्ध्याच्या वर्गमूळाइतके भुंगे मालती वृक्षावर गेले. त्याचप्रमाणें समूहाच्या $\frac{८}{९}$ इतके भुंगेहि मालती वृक्षावर गेले. उरलेल्या दोन भ्रमरांतला एक सुवासलुब्ध भ्रमर कमळांत अडकून ओरडूं लागला व त्याची प्रेयसी त्याला प्रतिसाद देऊं लागली. तर, हे प्रिये, एकूण भुंगे किती ?

स्पष्टीकरण : समजा भुंग्याची संख्या क्ष आहे. तर गृहीताप्रमाणें

$$क्ष - \sqrt{\frac{क्ष}{२}} - \frac{८}{९} क्ष = २. \quad \therefore \quad \frac{क्ष}{९} - २ = \sqrt{\frac{क्ष}{२}},$$

$$\therefore क्ष - १८ = ९ \sqrt{\frac{क्ष}{२}}.$$

वर्ग करून $क्ष^२ - ३६ क्ष + ३२४ = \frac{८१ क्ष}{२}$. किंवा $२ क्ष^२ - ७२ क्ष + ६४८ = ८१ क्ष$

किंवा $२ क्ष^२ - १५३ क्ष + ६४८ = ०$.

अवयव पाडून $(क्ष - ७२)\ (२ क्ष - ९) = ०$.

म्हणजेच $क्ष = ७२$ किंवा $क्ष = \frac{९}{२}$.

अर्थात् भुंग्यांची संख्या पूर्ण पाहिजे. $\therefore क्ष = ७२$ हें उत्तर.

वरील रीतींत वर्ग-समीकरण आलें असून $क्ष^२$ चा गुणक २ आहे, आणि अवयव पाडून क्ष ची किंमत मिळविली आहे.

भास्करीय पद्धतींत मूळ समीकरण

$\frac{क्ष}{९} - \sqrt{\frac{क्ष}{२}} = २$ म्हणून $\frac{१}{९} . \frac{क्ष}{२} - \frac{१}{२} \sqrt{\frac{क्ष}{२}} = १$ असें येतें.

येथें $\frac{क्ष}{२} = य^२$ समजल्यास $\frac{१}{९} य^२ - \frac{१}{२} य = १$ अर्थात् $य^२ - \frac{९}{२} य = ९$

$$\therefore य^२ - \frac{९}{२} य + \frac{८१}{१६} = ९ + \frac{८१}{१६} = \frac{२२५}{१६},$$

$\therefore \left(य - \frac{९}{४}\right)^२ = \frac{२२५}{१६} \quad \therefore य - \frac{९}{४} = \frac{१५}{४}$. किंवा $य = \frac{२४}{४} = ६$.

$\therefore य^२ = ३६$. यावरून $क्ष = २ य^२ = ७२$ हें उत्तर.

उदाहरण ६

श्लोक ७३

यो राशिरष्टादशभिः स्वमूलैः ।
राशित्रिभागेन समन्वितश्च ।।
जातं शतद्वादशकं तमाशु ।
जानीहि पाट्यां पटुताऽस्ति ते चेत् ।। ७३ ।।

अर्थ : एका संख्येंत तिच्या वर्गमूळाची १८ पट मिळविली, व त्याच संख्येचा तिसरा विभाग तिच्यांत मिळविला तर बेरीज १२०० होते. जर तुला पाटीगणित उत्तम येत असेल तर ती संख्या सांग.

स्पष्टीकरण : समजा $क्ष^२$ ही ती संख्या आहे. तर वर्णनाप्रमाणें

$$क्ष^२ + १८ क्ष + \frac{क्ष^२}{३} = १२००$$

$$\therefore \frac{४ क्ष^२}{३} + १८ क्ष = १२०० \qquad \therefore क्ष^२ + \frac{२७}{२} क्ष = ९००$$

$$\therefore क्ष^२ + \frac{२७}{२} क्ष + \frac{७२९}{१६} = ९०० + \frac{७२९}{१६} = \frac{१५१२९}{१६}$$

$$\therefore \left(क्ष + \frac{२७}{४}\right)^२ = \left(\frac{१२३}{४}\right)^२. \text{ अर्थात् } क्ष = \frac{१२३}{४} - \frac{२७}{४} = \frac{९६}{४}$$

$\therefore क्ष = २४$. अर्थात $क्ष^२ = ५७६$ हें उत्तर.

प्रकरण २१

त्रैराशिक

श्लोक ७४

प्रमाणमिच्छा च समानजातिः ।
आद्यंतयोस्तत् फलमन्यजातिः ।।
मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहृत्स्यात् ।
इच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे ।। ७४ ।।

अर्थ : त्रैराशिकांत आद्य राशीस प्रमाण, मध्य राशीस फल आणि अंत्य राशीस इच्छा म्हणतात. त्रैराशिकांत जें उत्तर काढावयाचें त्यास इच्छाफल म्हणतात. येथें प्रमाण व इच्छा या दोन्ही राशि एकाच जातीच्या असाव्या लागतात. व फल हें आद्यंताहून (१ ल्या व ३ ऱ्या राशींहून) निराळे असावें लागतें. त्रैराशिकांत इच्छाफल काढण्यासाठी (त्रैराशिक सम असतांना) तें खालील सूत्रानें मिळतें.

$$\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा}}{\text{प्रमाण}}$$. अर्थात (इच्छाफल, फलाच्याच जातीचें होतें).

त्रैराशिक व्यस्त असतांना विलोम क्रिया करावी.

स्पष्टीकरण : त्रैराशिकांत तीन राशि दिलेल्या असतात व चौथी राशि काढावयाची असते. येथें सरळ विचरण (direct variation) असतांना प्रमाणांक : फलांक : : इच्छा : इच्छाफल असें विचरण होतें म्हणजेच $\frac{\text{प्र}}{\text{फ}} = \frac{\text{इ}}{\text{इच्छाफल}}$ $\therefore$ $\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फ} \times \text{इ}}{\text{प्र}}$ हें सूत्र झालें. व्यस्त विचरण असेल तर $\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फ} \times \text{प्र}}{\text{इच्छा}}$ असें सूत्र होतें. किंवा विचरण रूपानें इच्छा : फल : : प्रमाण : इच्छाफल असें सरळ विचरण होईल. म्हणून इच्छाफल काढतांना फलास प्रमाणांकानें गुणून इच्छांकानें भागावें.

श्लोक ७५

इच्छावृद्धौ फले वृद्धिर्ह्रासे ह्रासश्च जायते ।
समत्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ।। ७५ ।।

अर्थ : प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक जास्त असेल आणि फलांकापेक्षां इच्छाफल जास्त होणार असेल तर तें समत्रैराशिक होतें. तसेंच प्रमाणापेक्षां इच्छा कमी व फलापेक्षां इच्छाफल कमी होणार असेल तर तें त्रैराशिक समच होतें.

उदाहरण १

श्लोक ७६

कुंकुमस्य सदलं पलद्वयं । निष्कसप्तमलवैस्त्रिभिर्यदि ।।
प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर । ब्रूहि निष्कनवकेन तत्कियत् ।। ७६ ।।

अर्थ : अडीच पल केशरास $\frac{3}{7}$ निष्क किंमत पडते तर, वणिक्श्रेष्ठा, ९ निष्कांत केशर किती येईल तें चटकन सांगा.

स्पष्टीकरण : ५ गुंजांचा १ मासा. ६४ मासे म्हणजे एक पल. म्हणजे १ पलांत ३२० गुंजा होतात. $2\frac{1}{2}$ पलांत ८०० गुंजा झाल्या. त्रैराशिक लिहितांना,

$\frac{३}{७}$ नि : $\frac{५}{२}$ प. : : ९ नि : इष्ट. असें लिहिलें. सोडवून इच्छाफल = $\frac{९ \times \frac{५}{२}}{\frac{३}{७}}$

$= ९ \times \frac{५}{२} \times \frac{७}{३} = \frac{१०५}{२} = ५२\frac{१}{२}$ पलें. हे त्रैराशिक सम आहे कारण जास्त पैशांत जास्त केशर येईल. कुंकुम याचा अर्थ केशर केला पाहिजे. खानापूरकर शास्त्री कुंकू घेतात तें बरोबर नाहीं. कारण अजमासें ८$\frac{१}{३}$ तोळे केशरास सुमारें २ रु. (१९३७ सालचा रुपया) त्या काळीं पडत होते. कुंकू हें अजूनही खूपच स्वस्त आहे.

उदाहरण २

श्लोक ७७

प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिषष्टया । चेल्लभ्यते निष्कचतुष्कयुक्तम् ।।
शतं तदा द्वादशभिः सपादैः । पलैः किमाचक्ष सखे विचिंत्य ।। ७७ ।।

अर्थ : बाजारांत शुद्ध केलेल्या कापराच्या ६३ पलांस विकून १०४ निष्क मिळतात. तर १२$\frac{१}{४}$ पलांस किती किंमत येईल तें, हे मित्रा, विचार करून सांग.

स्पष्टीकरण : हें उदाहरण सम त्रैराशिकाचें आहे. (ह्रासे ह्रासः)

त्रैराशिक ६३ प. : १०४ नि. : : १२$\frac{१}{४}$ प : इष्ट.

$\therefore$ इष्ट निष्क $= \frac{४९}{४} \times \frac{१०४}{६३} = \frac{१८२}{९} = २०\frac{२}{९}$ निष्क.

अर्थात २० निष्क] ३ द्रम्म ८ पण ३ काकिणी ११$\frac{१}{९}$ वराटक हें उत्तर.

उदाहरण ३

श्लोक ७८

द्रम्मद्वयेन साष्टांशा शालितण्डुलखारिका ।
लभ्या चेत् पणसप्तत्या तर्तिक सपदि कथ्यताम् ।। ७८ ।।

अर्थ : २ द्रम्मास जर १$\frac{१}{८}$ खारिका तांदूळ* मिळतात. तर ७० पणास (पैशांस) किती तांदूळ मिळतील ?

स्पष्टीकरण : हेंही त्रैराशिक सम आहे. (वृद्धौ वृद्धिः)

त्रैराशिक असें होईल ३२ पै : $\frac{९}{८}$ खा. : : ७० पै. : इष्ट.

इष्ट $= \frac{७० \times ९}{३२ \times ८} = \frac{३१५}{१२८}$ खारिका $= २\frac{५९}{१२८}$ खारिका.

---

* त्याकाळीं ८ आण्यांत ७ ते ८ शेर तांदूळ मिळत होते असें दिसतें.

प्रकरण २२

व्यस्त त्रैराशिक सूत्र

श्लोक ७९

इच्छावृद्धौ फले ऱ्हासो ऱ्हासे वृद्धिश्च जायते ।
व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ।। ७९ ।।

अर्थ : प्रमाणापेक्षां इच्छांक जास्त असून फलापेक्षां इच्छाफल कमी होत असेल तर व्यस्त त्रैराशिक समजावे. तसेंच प्रमाणापेक्षा इच्छांक कमी असून फलापेक्षां इच्छाफल जास्त होईल तरीही गणितज्ञानें त्रैराशिक व्यस्त समजावें.

स्पष्टीकरण : सम आणि व्यस्त त्रैराशिक घेतांना तारतम्यानें इष्टफल कसें येईल, कमी कीं अधिक, हें ओळखावयाचें असतें. त्रैराशिक सोडविण्याचे नियम नंतर लावावयाचे असतात. हल्लीं त्रैराशिकाऐवजीं एकमानपद्धति (unitary method) वापरण्याची प्रथा आहे. पाश्चात्य पुस्तकांतून rule of three जवळ जवळ नाहींसाच झाला आहे. त्यामुळें पंचराशिक, बहुराशिक वगैरे रीती अर्थातच नाहींत. त्या आतां इतिहासजमाच झाल्यासारख्या आहेत. लेखकाचें स्पष्ट मत असें आहे कीं त्रैराशिक पद्धतींत असलेली गतिमानता एकमानपद्धतींत कमी होते. शिवाय आंकडेमोड वाढते ती वेगळीच.

श्लोक ८०

जीवानां वयसो मौल्ये तौल्ये वर्णस्य हेमनि ।
भागहारेच राशीनाम् व्यस्तं त्रैराशिकं विदुः ।। ८० ।।

अर्थ : प्राण्यांच्या वयाशीं किंमतीचा संबंध आल्यास त्रैराशिक व्यस्त समजावें. विवक्षित कसाच्या सोन्याचा वजनाशीं संबंध आल्यास त्रैराशिक व्यस्त समजावें. दिलेल्या मापानें धान्यराशि मोजतांनाही त्रैराशिक व्यस्त समजावें.

स्पष्टीकरण : यांतल्या पहिल्या प्रकारांत नियम बरोबर आहे असे व्यवहारांत दिसत नाहीं. लहान वयाच्या नोकराचा पगार लहान, तर मोठ्याचा पगार मोठा हेंही ठीक वाटतें.

उदाहरण १

श्लोक ८१

प्राप्नोति चेत् षोडशवत्सरा स्त्री । द्वात्रिंशकं विंशतिवत्सरा किम् ।
द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षा । प्राप्नोति धूःषट्कवहस्तदा किम् ।।८१।।

अर्थ : षोडषवर्षीय स्त्री (गुलाम) जर ३२ निष्कांस मिळत असेल तर वीस वर्षे वयाच्या स्त्रीस काय किंमत पडेल ? तसेंच धुरा वाहणाऱ्या (म्हणजे नांगर ओढण्यासाठीं जेथें जुंवास २ बैल लावावे लागतात तेथें) जोडींतील एका बैलास जर ४ निष्क पडतात, तर जेथें तोच नांगर ओढण्यास ६ बैलांचा तांडा लागत असेल तेथे त्यांतल्या एकाची किंमत काय ?

स्पष्टीकरण : पहिल्या उदाहरणांत गुलाम स्त्री १६ वर्षांची म्हणजे (अनाघ्राता) नवोढा असेल तर तिची जास्त किंमत येते. वय वाढूं लागलें म्हणजे किंमत कमी होते या नियमाप्रमाणें :

$$\text{इष्टफल} = \frac{३२ \times १६}{२०} = \frac{१२८}{५} \text{ निष्क} = २५\frac{३}{५} \text{ निष्क हें उत्तर}$$

दुसऱ्या उदाहरणांत व्यस्त त्रैराशिक आहे. कारण जर २ बैल नांगर ओढतात असा नांगर ओढण्यास ६ बैल लागले तर दुसऱ्या प्रकारचे सर्वच बैल अशक्त असले पाहिजेत.

$$\therefore \text{इष्टफल} = \frac{४ \times २}{६} = १\frac{१}{३} \text{ निष्क हें उत्तर.}$$

उदाहरण २

श्लोक ८२ अ

दशवर्णं सुवर्णं चेद्गद्याणकमवाप्यते ।
निष्केण तिथिवर्णं तु तदा वद कियन्मितम् ।। ८२ अ ।।

अर्थ : एका निष्कांत १० कसाचें सोनें १ गद्याणक (४८ गुंजा) मिळतें. तर त्याच किंमतींत १५ कसाचें सोनें किती मिळेल ?

स्पष्टीकरण : किंमत तीच असल्यानें कस वाढविल्यास वजन कमी. येथें त्रैराशिक व्यस्त.

इष्ट वजन = $\frac{१०}{१५} \times १$ गद्या. = $\frac{२}{३}$ गद्या. = ३२ गुंजा.

(वरील उदाहरणावरून असें दिसतें कीं भास्कराचार्याच्या काळांत शुद्ध सोन्याचा भाव $\frac{५२}{१५} \times ४ \times ३ = ४१\frac{३}{५}$ रुपये असावा.)

उदाहरण ३

श्लोक ८३ अ

सप्ताढकेन मानेन राशौ सस्यस्य मापिते ।
यदि मानशतं जातं तदा पंचाढकेन किम् ।। ८३ अ ।।

अर्थ : सात आढकांच्या मापानें जी धान्याची रास १०० मापें भरते, ती जर पांच आढकांच्या मापानें मोजली तर किती मापें भरेल ?

स्पष्टीकरण : हें व्यस्त त्रैराशिकाचें उदाहरण आहे. $\frac{१०० \times ७}{५}$ मापें = १४० मापें हें उत्तर.

प्रकरण २३

अथ पंचराशिकादि प्रकरणम्
(पंचराशिक पद्धति)

श्लोक ८२

सूत्रम्ः- **पंचसप्तनवराशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम् ।**
संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलम् ॥ ८२ ॥

अर्थ : पंचराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक, इत्यादींत सर्व फलांक हे एका पक्षांत म्हणजे अंशांत न्यावे. इच्छा त्याच पक्षांत न्यावी. तसेंच सर्व प्रमाणांक हे उरलेल्या पक्षांत म्हणजेच छेदांत न्यावे. ज्यांत अधिक राशी आहेत त्या पक्षांतील राशींच्या गुणाकारास ज्यांत कमी राशी आहेत त्यांतील राशींच्या गुणाकारानें भागावें. म्हणजे इच्छाफल किंवा उत्तर मिळेल.
(विशेष शब्दांचे अर्थ : वध = गुणाकार; भाजिते = भागलें असतां.)

उदाहरण

श्लोक ८३

मासे शतस्य यदि पञ्चकलान्तरं स्यात् ।
वर्षे गते भवति किं वद षोडशानाम् ।
कालं तथा कथय मूलकलान्तराभ्याम् ।
मूलं धनं गणक कालफले विदित्वा ॥८३॥

या प्रश्नात तीन उदाहरणें आहेत

उदा. १ ले :- एक महिना १०० रुपये व्याजीं लावल्यास व्याज पांच रुपये येतें, तर एक वर्ष मुदतीनें १६ रुपये व्याजीं लावल्यास व्याज किती ? यांत १०० रुपये व १ महिना हे प्रमाणांक, १६ रुपये व १२ महिने हे फलांक व ५ रुपये ही इच्छा. तर इष्टफल काढणें. वर दिलेल्या रीतीप्रमाणें,

$$\text{इष्टफकल} = \frac{१६ \times १२ \times ५}{१०० \times १} = \frac{४८}{५} = ९\frac{३}{५} \text{ रुपये व्याज हें उत्तर.}$$

पंचराशिकाची मांडणी पुढीलप्रमाणें करावी.

$$\left.\begin{matrix} \text{१०० रु. मुद्दल} & : & \text{१६ रु. मुद्दल} \\ \text{१ महिना} & : & \text{१२ महिने} \end{matrix}\right\} :: \text{ ५ रु. व्या. : इष्ट व्याज, सम सम}$$

म्हणून वरीलप्रमाणें गुणाकार मांडून ९$\frac{३}{५}$ रु. हें उत्तर आलें.

उदा. २ रें : जर याच उदाहरणांत मुद्दल व व्याज दिलें असेल तर मुदत काढणे.

हा प्रश्न पुढीलप्रमाणें होईल. १०० रुपयास एक महिन्यास ५ रुपये व्याज, याप्रमाणें १६ रुपयांचें ९$\frac{३}{५}$ रुपये व्याज येण्यास मुदत किती पाहिजे ?

यांत १०० रु. व ५ रु. हे प्रमाणांक, १६ रु. व ९$\frac{३}{५}$ रु. हे फलांक व एक महिना ही इच्छा. म्हणून पंचराशिकाची मांडणी पुढील प्रमाणें.

$$\left.\begin{matrix} \text{१०० रु.} : \text{१६ रु.} \\ \text{५ व्या.} : \frac{४८}{५}\ \text{व्या.} \end{matrix}\right\} :: \text{१ म : इष्ट महिने,} \quad \left.\begin{matrix} \text{व्यस्त} \\ \text{सम} \end{matrix}\right\}$$

यांतील पहिलें त्रैराशिक व्यस्त. कारण मुद्दल कमी झालें तर तितकेंच व्याज येण्यास मुदत अधिक.

$$\therefore \text{ इष्ट मुदत } = \frac{१०० \times १}{१६ \times ५} \times \frac{४८}{५} = ४ \times ३ = \text{१२ महिने, हें उत्तर.}$$

उदा. ३ रें : याच उदाहरणांत जर मुदत व व्याज दिलें असेल तर मुद्दल काढणें.

हा प्रश्न पुढील प्रमाणें होईल. १०० रु. स एक महिन्यास ५ रु. व्याज. तर १ वर्षाचें ९$\frac{३}{५}$ रु. व्याज असणारी रक्कम किती ?

यांत प्रमाणांक १ महिना व ५ रुपये. फलांक १२ महिने व $\frac{४८}{५}$ रुपये व इच्छा १०० रु. पंचराशिकाची मांडणी पुढीलप्रमाणें.

$$\left.\begin{matrix} \text{५ व्याज} : \frac{४८}{५}\ \text{व्याज} \\ \text{१ म.} : \text{१२ म.} \end{matrix}\right\} :: \text{१०० रु. : इष्ट मुद्दल.} \quad \left.\begin{matrix} \text{सम} \\ \text{व्यस्त} \end{matrix}\right\}$$

यातलें पहिले त्रैराशिक सम, तर दुसरें मुदत-मुद्दलचें व्यस्त.

$$\therefore \text{ इष्ट मुद्दल } \div \frac{१०० \times ४८}{५ \times ५} \times \frac{१}{१२} = \text{१६ रु. हें उत्तर.}$$

उदाहरण ४

श्लोक ८४

सत्र्यंशमासेन शतस्य चेत्स्यात्कलान्तरं पञ्च सपञ्चमांशाः ।
मासैस्त्रिभिः पञ्चलवाधिकेस्तत्सार्धद्विषष्टेः फलमुच्यतां किम् ॥८४॥

अर्थ : १०० रुपयांचे १$\frac{१}{३}$ महिन्यांचें व्याज जर ५$\frac{१}{५}$ रुपये होत असेल तर ६२$\frac{१}{२}$ रुपयांचें ३$\frac{१}{५}$ महिन्यांचें व्याज काय ?

(यांतील शब्दांचे अर्थ : सत्र्यंश = तिसऱ्या हिश्शासहित = $१ + \frac{१}{३} = \frac{४}{३}$. सपञ्चमांशाः पञ्च = $५ + \frac{१}{५} = \frac{२६}{५}$. पञ्चलव = पांचवा हिस्सा= $\frac{१}{५}$.)

उत्तराची रीत : येथें १०० रु. व $\frac{४}{३}$ महिने हे प्रमाणांक, ६२$\frac{१}{२}$ रुपये व ३$\frac{१}{५}$ महिने हे फलांक व ५$\frac{१}{५}$ रु. ही इच्छा. पंचराशिकाची मांडणी पुढीलप्रमाणें

$$\left.\begin{matrix} १०० \text{ रु.} & : & ६२\frac{१}{२} \text{ रु.} \\ \frac{४}{३} \text{ म.} & : & \frac{१६}{५} \text{ म.} \end{matrix}\right\} : : \frac{२६}{५} \text{ व्या.} : \text{इष्ट व्याज.} \begin{matrix} \text{सम} \\ \text{सम} \end{matrix} \Bigg\}.$$

$$\text{इष्ट व्याज} = \frac{२६}{५} \times \frac{१२५}{२} \times \frac{१६}{५} \times \frac{१}{१००} \times \frac{३}{४} = \frac{३९}{५}$$

$$= ७\frac{४}{५} \text{ रु. हें उत्तर.}$$

येथें अपूर्णांक राशींनीं भागतांना उलट करून गुणलें आहे.

उदाहरण ५

श्लोक ८५

विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्ध्ये विचित्राश्च चेत् ।
रूपैरुत्कपट्टसूत्रपटिका अष्टौ लभन्ते शतम् ।।
दैर्घ्ये सार्धकरत्रयाऽपरपटी हस्तार्धविस्तारिणी ।
तादृक्किलभते द्रुतं वद वणिग्वाणिज्यकं वेत्सि चेत् ।।८५।।

अर्थ : तीन हात रुंद व आठ हात लांब, चित्रविचित्र रंगांचीं व उत्तम किनारीचीं आठ वस्त्रें १०० निष्कांस मिळतात. तर साडेतीन हात लांब व अर्धा हात रुंद अशी त्याच प्रकारची पट्टी (छोटें वस्त्र) केवढचा किंमतीस मिळेल ? व्यापाऱ्या, तुला जर व्यापारशास्त्र येत असेल तर झट्कन सांग.

(कठीण शब्द : विस्तार=रुंदी; दैर्ध्य=लांबी; विचित्र=रंगीबेरंगी, निरनिराळ्या नकशीचीं; उत्कटपट्ट = कांठ, किनार; पटिका = वस्त्र.)

रीत : या प्रश्नांत प्रमाणांक ३ हात, ८ हात व नग ८ हे होत.
फलांक $\frac{१}{२}$ हात, $\frac{७}{२}$ हात व नग १ हे होत.
तसेंच १०० रु. ही इच्छा. तर इष्टफल किती ?

हे सप्तराशिकाचें उदाहरण आहे. मांडणी पुढील प्रमाणे

$$\left.\begin{matrix} ३ \text{ हात रुं.} & : & \frac{१}{२} \text{ हात रुं.} \\ ८ \text{ हात लां.} & : & \frac{७}{२} \text{ हात लां.} \\ ८ \text{ नग} & : & १ \text{ नग} \end{matrix}\right\} : : १०० \text{ रु.} : \text{इष्ट} \Bigg\} \text{ सर्व त्रैराशिकें सम.}$$

$$\text{इष्ट} = \frac{१ \times ७ \times १ \times १००}{२ \times २ \times ३ \times ८ \times ८} = \frac{१७५}{१९२} \text{ निष्क, हें उत्तर.}$$

उदाहरण ६

श्लोक ८६

पिण्डे येऽर्कमिताङ्गुलाः किल चतुर्वर्गांगुला विस्तृतौ ।
पट्टा दीर्घतया चतुर्दशकरास्त्रिशल्लभन्ते शतम् ।।
एता विस्तृतिपिण्डदैर्घ्यमितयो येषां चतुर्वर्जिताः ।
पट्टास्ते वद मे चतुर्दश सखे मूल्यं लभन्ते कियत् ।।८६।।

अर्थ : १४ हात लांब, १६ अंगुळें रुंद व १२ अंगुळें जाड अशा ३० फळचांना (तुळयांना) १०० निष्क पडतात. तर प्रत्येक परिमाणांतून ४ वजा करून जीं मापें येतील त्या मापाच्या चौदा फळचांना काय किंमत पडेल ते, मित्रा, मला सांग.
(कठीण शब्द : पिण्ड = जाडी; अर्क = १२;
अंगुल = अंगुळ; २४ अंगुळें = १ हात; पट्टा = फळी;)

रीत : यांत १४ हात, १६ अंगुळें हे प्रमाणांक. ३० फळचा हा प्रमाणांक. ४ कमी करून, १० हात, १२ अंगुळें, ८ अंगुळें हे फलांक. १४ फळचा हा फलांक. १०० निष्क ही इच्छा. तर इष्टफल काय ?
हें उदाहरण नवराशिकाचें आहे. मांडणी पुढीलप्रमाणें.

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{१४ हात} & : & \text{१० हा.} \\ \text{१६ अं.} & : & \text{१२ अं.} \\ \text{१२ अं.} & : & \text{८ अं.} \\ \text{३० नग} & : & \text{१४ नग} \end{array}\right\} :: \text{१०० नि.} : \text{इ निष्क} \Big\} \text{ चारी त्रैराशिकें सम.}$$

$$\therefore \text{इष्ट निष्क} = \frac{\text{१०}\times\text{१२}\times\text{८}\times\text{१४}\times\text{१००}}{\text{१४}\times\text{१६}\times\text{१२}\times\text{३०}\times\text{१}} = \frac{\text{५०}}{\text{३}} \text{ निष्क} = \text{१६}\frac{\text{२}}{\text{३}} \text{ निष्क.}$$

टीप : या उदाहरणांत चतुर्वर्जिता म्हणजे प्रत्येक माप ४ नें कमी. चार अंगुळांनीं कमी असा अर्थ नाहीं. हल्लींच्या हिशेबांत १ हात = $\text{१}\frac{\text{१}}{\text{२}}$ फू. धरल्यास, १८ इंच = २४ अंगुळें.

$\therefore$ १ इंच = $\frac{\text{४}}{\text{३}}$ अंगुळें. म्हणून अंगुलि म्हणजे बोटाचें पेर हा अर्थ घ्यावा लागतो. अंगठ्याचें पेर लांबींत बोटाच्या पेरापेक्षां मोठें असतें.

उदाहरण ७

श्लोक ८७

पट्टा ये प्रथमोदितप्रमितयो गव्यूतिमात्रे स्थिताः ।
तेषामानयनाय चेच्छकटिनां द्रम्माष्टकं भाटकम् ।।

अन्ये ये तदनंतरं निगदिता माने चतुर्वर्जिताः ।
तेषां किं भवतीति भाटकमितिर्गव्यूतिषट्के वद ॥ ८७ ॥

अर्थ : पूर्वीच्या उदाहरणांत सांगितलेल्या फळचा एक गव्यूति (कोस) अंतरावरून आणण्यास जर ८ द्रम्म (पावली) भाडें पडत असेल तर, नंतर सांगितलेल्या, चारांनीं मापें कमी असणाऱ्या फळचा ६ गव्यूति अंतरावरून आणण्यास बैलगाडीवाल्यास काय द्यावें ?
(कठीण शब्द : गव्यूति = कोस किंवा २ मैल. गव्यूति = २ कोस असाही अर्थ आहे. शकटिन् = गाडीवाला. द्रम्म = दाम, पावली. भाटकम् = भाडें. प्रमिति = माप.)

रीत : हें उदाहरण एकादशराशिकाचें आहे, म्हणजेच बहुराशिकाचें आहे. मांडणी पूर्वींप्रमाणेंच करून

१४ हात	:	१० हात	: : ८ द्र. : इष्ट द्रम्म	यांतील सर्व त्रैराशिकें सम.
१६ अं.	:	१२ अं.		
१२ अं.	:	८ अं.		
३० न	:	१४ न.		
१ ग.	:	६ ग.		

$$\therefore \text{ इष्ट फल } = \frac{१० \times १२ \times ८ \times १४ \times ६ \times ८}{१४ \times १६ \times १२ \times ३० \times १} = ८ \text{ द्रम्म, हें उत्तर.}$$

प्रकरण २४

भांडप्रतिभांडक क्रियासूत्रम् ।
वस्तूंची मापी देवघेव करण्याचा नियम.

श्लोक ८८

सूत्र :–तथैव भांडप्रतिभांडकेऽपि । विधिर्विपर्यस्य हरांश्च मूल्ये ॥८८॥

अर्थ : दोन निरनिराळ्या पदार्थांची देवघेव करावयाची असल्यास त्रैराशिक, पंचराशिक वापरावें. त्याचा प्रकार मूळप्रमाणेंच. फक्त किंमत व इष्टवस्तु यांचें त्रैराशिक व्यस्त समजावें.

उदाहरण

श्लोक ८९

द्रम्मेण लभ्यत इहाऽऽम्रशतत्रयं चेत् ।
त्रिंशत्पणेन विपणौ वरदाडिमानि ॥

आम्रैर्वदाऽशु दशभिः कति दाडिमानि ।
लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र ॥ ८९ ॥

अर्थ : जर बाजारांत १ द्रम्मास म्हणजे १६ पैशांस ३०० आंबे मिळतात, तसेंच एक पैशास बऱ्यापैकीं तीस डाळिंबें मिळतात; तर १० आंब्यांच्या बदलांत किती डाळिंबें मिळूं शकतील तें चटकन सांग.

१ ली रीत : भास्कराचार्यांच्या रीतीप्रमाणे, ३०० आंबे व १६ पैसे हे प्रमाणांक. १० आंबे व १ पैसा हे फलांक. तीस डाळिंबें ही इच्छा. मांडणी पुढीलप्रमाणें.

$$\left.\begin{matrix} ३०० \text{ आं.} : १० \text{ आं.} \\ १६ \text{ पै.} : १ \text{ पै.} \end{matrix}\right\} : : ३० \text{ डा} : \text{इष्ट} \left.\right\}$$ वर सांगितल्याप्रमाणें, पहिलें त्रैराशिक सम व दुसरें व्यस्त.

$$\therefore \text{इष्टफल} = \frac{१० \times ३० \times १६}{३०० \times १} = १६ \text{ डाळिंबें, हे उत्तर.}$$

वरील रीतींत दुसरें त्रैराशिक व्यस्त घेण्यास सांगितलें आहे त्याचें स्पष्टीकरण नाहीं.

२ री रीत : प्रथम ३०० आंब्यांच्या बदलांत किती डाळिंबें येतील तें त्रैराशिकानें काढूं. अर्थात् १ पैशास ३० डाळिंबें तर १६ पैशांस १६ × ३० = ४८० डाळिंबें आलीं. म्हणजेच ३०० आंबे ४८० डाळिंबांशीं विनिमेय, म्हणजे बदलीयोग्य, आहेत.

आतां दुसरें त्रैराशिक मांडून,

३०० आं : १० आं : : ४८० डा : इष्ट (सम)

$$\therefore \text{इष्टफल} = \frac{१० \times ४८०}{३००} = १६ \text{ डाळिंबे, हें उत्तर.}$$

प्रकरण २५

मिश्रव्यवहार (रास) सूत्र

श्लोक ९०

प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं । विमिश्रकालेन हतं फलं च ॥
स्वयोगभक्ते च पृथक् स्थिते च । मिश्राहते मूल कलान्तरे स्तः ॥ ९० ॥

अर्थ : (सरळ व्याजाच्या उदाहरणांत रास, व्याजाचा दर व मुदत दिली असतां मुद्दल व व्याज काढणें.) प्रमाणधनास (१००) प्रमाणकालानें गुणावें. मुदतीनें व्याजाच्या दरास (फल) गुणावें. हे दोन्ही गुणाकार निरनिराळ्या ठिकाणीं मांडावे. नंतर मिश्रधनानें पहिल्या गुणाकारास गुणून दोन्ही गुणाकारांच्या बेरजेनें भागावें म्हणजे मूळ (मुद्दल) मिळतें. तसेंच मिश्रानें दुसऱ्या गुणाकारास गुणून दोन्ही गुणाकारांच्या बेरजेनें भागावें म्हणजे व्याज मिळतें.

स्पष्टीकरण : प्रमाणधन = ज्यावर व्याजाचा दर सांगितला जातो तें धन, बहुधा १००.
प्रमाणकाल = मुदत, (प्रमाणधनाच्या व्याजाची)
विमिश्रकाल = मुदत, दिलेल्या मुद्दलासाठीं. फल, कलांतर = व्याज. मिश्रद्रव्य = रास

$$\text{येथे मुद्दल} = \frac{\text{राशि} \times \text{प्रमाणधन} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मुदत} \times \text{व्याजाचा दर}}$$

$$\text{व्याज} = \frac{\text{राशि} \times \text{मुदत} \times \text{व्याजाचा दर}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मुदत} \times \text{दर}}$$

नवीन रीतीनें, १०० रु. चें दिलेल्या मुदतीचें व्याज १०० त मिळवून जी रास झाली तिजवरून त्रैराशिकानें अगोदर मुद्दल व नंतर राशींतून मुद्दल वजा करून व्याज मिळेल.

उदाहरण

श्लोक ९१

पंचकेन शतेनाब्दे मूलं स्वं सकलान्तरम् ।
सहस्रं चेत्पृथक् तत्र वद मूल कलान्तरे ॥ ९१ ॥

अर्थ : (दरमहा ?) दरशेंकडा ५ व्याजाच्या दरानें मुद्दल व व्याज मिळून १००० निष्क होतात तर मुद्दल व व्याज काय ?

स्पष्टीकरण : व्याजाचा दर दरमहा आहे असें वर म्हटलेलें नाही. तथापि त्या काळीं महिन्याचें व्याज आकारलें जात असावें असें दिसते.

$$\text{वरील सूत्रानें, मुद्दल} = \frac{१००० \times १०० \times १म}{१०० \times १ + १२ \times ५} = \frac{१००० \times १००}{१६०} = ६२५.$$

$$\text{आणि व्याज} = \frac{१००० \times १२ \times ५}{१६०} = ३७५.$$

अर्थात मुद्दल समजल्यावर रास – मुद्दल = व्याज ही रीतही लावतां येईल.
पण ६२५ चें १ वर्षाचें व्याज ३७५ हें फार भारी वाटतें.

श्लोक ९२ अ

सूत्र : **अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला । व्यतीतकालघ्न–फलोद्धृतास्ते ॥**
स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिघ्नाः । प्रयुक्तखंडानि पृथक् भवन्ति
॥ ९२ अ ॥

अर्थ : (रकमेचे विभाग निरनिराळ्या दरांनीं निरनिराळ्या मुदतीसाठीं देऊन व्याज समान येत असल्यास विभाग काढणें.) प्रमाणधनांनीं प्रमाणकालास गुणावें व त्यास आपापल्या

मुदत × व्याजदर या गुणाकारांनीं भागावें. येतील त्या भागाकारांच्या बेरजेनें त्या प्रत्येक भागाकारास भागावें व मिश्रधनानें म्हणजे एकूण रकमेनें गुणावें म्हणजे पृथक् रकमा येतात.

स्पष्टीकरण : पूर्वी ज्यास कच्चे करणें असें म्हणत, त्याप्रमाणें व्याजाचा दर × मुदत या रकमांच्या प्रमाणांत एकाच मुदतीची समान मुद्दलाची व्याजें होतात. म्हणून मूळ रकमेच्या विभागांचे प्रमाण कच्च्यांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांत केलें म्हणजे व्याजें सारखीं होतात. किंवा बैजिक पद्धतीनें जर **अ**, **ब**, **क** हे रकमेचे विभाग धरले

तर अ + ब + क = मूळ रकम.

अचें व्याज $\frac{अ \times द_1 \times मु_1}{१००}$. त्याच प्रमाणें **ब** व **क** रकमांवरील व्याजें काढून खालील प्रमाण मिळतें. (द = दर, मु = मुदत.)

$$\therefore \frac{अ}{\frac{१}{द_1 मु_1}} = \frac{ब}{\frac{१}{द_2 मु_2}} = \frac{क}{\frac{१}{द_3 मु_3}} = \frac{अ + ब + क}{\frac{१}{द_1 मु_1} + \frac{१}{द_2 मु_2} + \frac{१}{द_3 मु_3}}$$

$$\therefore अ = \frac{(\text{रकम}) \times \frac{१}{द_1 मु_1}}{\frac{१}{द_1 मु_1} + \frac{१}{द_2 मु_2} + \frac{१}{द_3 मु_3}}$$ याप्रमाणें रकमा मिळतात.

या स्पष्टीकरणांत बीजगणितांतला प्रमाणनियम

$$\frac{अ}{क्ष} = \frac{ब}{य} = \frac{क}{ज्ञ} = \frac{अ + ब + क}{क्ष + य + ज्ञ}$$ हा वापरला आहे.

उदाहरण

श्लोक ९२

यत्पंचकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं ।
खंडैस्त्रिभिर्गणक निष्कशतं षडूनम् ।।
मासेषु सप्तदशपंचसु तुल्यमात्रम् ।
खंडत्रयेऽपि हि फलं वद खंडसंख्याम् ।। ९२ ।।

अर्थ : ९४ निष्क रकम तीन विभागांत वांटून पहिला भाग ५ दरानें ७ महिने, दुसरा भाग ३ दरानें दहा महिने व तिसरा भाग ४ दरानें ५ महिने व्याजीं लावले. त्यांपासून सारखेंच व्याज आलें, तर त्या तीन रकमा काय ?

स्पष्टीकरण : भास्करीय रीतीनें,

प्रमाण विभाग $\frac{१ \times १००}{५ \times ७}$, $\frac{१ \times १००}{३ \times १०}$, $\frac{१ \times १००}{५ \times ४}$,

$$\therefore \frac{२०}{७} + \frac{१०}{३} + ५ = \frac{२३५}{२१}.$$

म्हणून पहिली रकम $९४ \times \frac{२०}{७} \div \frac{२३५}{२१}$

$$= \frac{९४ \times २० \times २१}{७ \times २३५} = \frac{२ \times २० \times ३}{५} = २४.$$

दुसरी रकम $= ९४ \times \frac{१०}{३} \div \frac{२३५}{२१} = \frac{९४ \times १० \times २१}{३ \times २३५} = \frac{२ \times १० \times ७}{५} = २८.$

तिसरी रकम $= ९४ \times ५ \div \frac{२३५}{२१} = \frac{९४ \times ५ \times २१}{२३५} = २ \times २१ = ४२.$

आणि २४ + २८ + ४२ = ९४. $\therefore$ २४, २८, ४२ निष्क हें उत्तर.

सूत्रः– एकत्रित भांडवलावरील नफा दिल्यास वैयक्तिक रकमा काढण्यासंबंधीं.

श्लोक ९३

प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ता । प्रक्षेपयोगेन पृथक् फलानि ।। ९३ ।।

अर्थ : व्यापारांत वैयक्तिक भांडवलें दिलेली असल्यास जी एकूण मिळकत असेल तिनें प्रत्येक भांडवलास गुणावें व भांडवलांच्या बेरजेनें भागावें; म्हणजे वैयक्तिक मिळकत व लाभांश हीं दोन्ही समजतात.

स्पष्टीकरण : समजा भांडवलाचे वैयक्तिक विभाग **अ, ब, क** असतील तर एकूण भांडवल अ + ब + क झालें. व्यापारांत भांडवलासुद्धां मिळकत **क्ष** झाली तर प्रत्येक भांडवल $\frac{क्ष}{अ+ब+क}$ या प्रमाणांत वाढलें.

$\therefore$ **अ** ची रास $\frac{अ \times क्ष}{अ+ब+क}$ इतकी होईल. याच प्रमाणें इतर राशींचें समजावें.

या ठिकाणीं दुसरी रीतही संभवते.

मिश्रधन – प्रक्षेपयोग = लाभ.

$\therefore$ क्ष – (अ + ब + क) = **य** हा लाभ समजा. लाभांश प्रक्षेपाच्या प्रमाणांत

$\therefore \frac{य \times अ}{अ+ब+क}$ हा पहिल्या भांडवलावरील फायदा.

$$\therefore \text{ पहिली रास} = \frac{\text{अय}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}} + \text{अ} = \frac{\text{अ}\{\text{क्ष} - (\text{अ}+\text{ब}+\text{क})\}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}} + \text{अ}$$

$$= \frac{\text{अक्ष}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}} - \text{अ} + \text{अ} = \frac{\text{अक्ष}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}}$$

श्लोक ९४

पंचाशदेक–सहिता गणकाष्टषष्टिः ।
पंचोनिता नवतिरादिधनानि येषाम् ।।
प्राप्ता विमिश्रितधनैस्त्रिशती त्रिभिस्तैः ।
वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम् ।। ९४ ।।

अर्थ : तीन वाण्यांनीं एका व्यापारांत अनुक्रमे ५१, ६८ व ८५ निष्क इतकें भांडवल घातलें; व कौशल्यानें व्यापार करून ३०० निष्क एवढी मिळकत केली. तर प्रत्येकाची मिळकत काय ?

स्पष्टीकरण : त्यांचे एकूण भांडवल ५१ + ६८ + ८५ = २०४ निष्क.

एकूण मिळकत = ३०० निष्क.

$$\text{पहिल्याची मिळकत} = \frac{५१ \times ३००}{२०४} = ७५ \text{ नि.}$$

$$\text{दुसऱ्याची मिळकत} = \frac{६८ \times ३००}{२०४} = १०० \text{ नि.}$$

$$\text{तिसऱ्याची मिळकत} = \frac{८५ \times ३००}{२०४} = १२५ \text{ नि.}$$

$$\text{त्यांचे लाभांश} \left.\begin{array}{l} ७५ - ५१ = २४; \\ १०० - ६८ = ३२ \\ १२५ - ४५ = ४० \end{array}\right\} \text{एकूण लाभ ९६ नि.}$$

सूत्र : हौद, विहिरी, तलाव, टांकी भरण्यासंबंधीं (वापीपूरण)

श्लोक ९५ अ

भजेच्छिदोंऽशैरथ तैर्विमिश्रै ।
रूपं भजेत् स्यात् परिपूर्तिकालः ।। ९५ अ ।।

अर्थ : (झरे किंवा नळ यांनीं विहिरी किंवा हौद भरण्यास) जो काळ लागतो त्यांच्या छेदास अंशांनीं भागावे म्हणजे त्यांचा व्युत्क्रम अपूर्णांक घ्यावा व त्यांच्या बेरजेनें १ स (रूपं) भागावें म्हणजे विहीर किंवा तलाव भरण्याचा काळ मिळतो.

स्पष्टीकरण : येथें स्पष्टीकरणाची विशेष गरज नाहीं. नवी व जुनी रीत एकाच प्रकारची आहे. भास्कराचार्यांच्या काळीं अर्थातच नळ नव्हते पण तोटचा होत्या व झरे होते.

उदाहरण

श्लोक ९५

ये निर्झरा दिनदिनार्धतृतीयषष्ठैः ।
संपूर्णयन्ति हि पृथग्पृथगेव मुक्ताः ।।
वापीं यदा युगपदेव सखे विमुक्ताः ।
ते केन वासरलवेन तदा वदाऽशु ।। ९५ ।।

अर्थ : एका विहिरीस चार झरे आहेत. प्रत्येक झरा स्वतंत्र रीतीनें $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ व एक दिवस इतक्या वेळांत विहीर भरतो. तर ते झरे एकदम सुरू केल्यास किती वेळांत (दिवसांत) विहीर भरेल ?

स्पष्टीकरण : नेहमींच्या रीतीनें व्युत्क्रमांक २, ३, ६, १ यांची बेरीज १२ यांनीं १ स भागलें म्हणजे $\frac{1}{12}$ दिवस (५ घटिका) हें उत्तर. पहिला झरा $\frac{1}{2}$ दिवसांत १ विहीर भरतो. म्हणजे १ दिवसांत २ विहिरी इतक्या अवकाशाचें पाणी बाहेर फेंकील. याप्रमाणें चारही झरे अनुक्रमें २ वि. ३ वि. ६ वि. व १ विहीर इतक्या विहिरी म्हणजेच १२ विहिरी अवकाशाचें पाणी बाहेर फेंकतात. याला १ दिवस लागतो. म्हणून १ विहीर भरण्यास $\frac{1}{12}$ दिवस लागेल.

सूत्र : धान्य विभागांच्या किंमतीसंबंधीं

श्लोक ९६

पण्यैः स्वमूल्यानि भजेत्स्वभागैः ।
हत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि ।।
भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा ।
मूल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ।। ९६ ।।

अर्थ : धान्याच्या प्रमाणानें त्याच्या किंमतीस भागावें व धान्याच्या मापानें गुणावें. असे गुणाकार येतील त्यांच्या बेरजेनें त्या मापास भागून मिश्रधनानें गुणल्यास प्रत्येक धान्याच्या किंमती येतील व मिश्र मापास गुणल्यास प्रत्येक माप किती तें समजेल.

उदाहरण

श्लोक ९७

सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं ।
मुद्गानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिक्काकिणीः ।।
आदायाऽर्पय तण्डुलांशयुगुलं मुद्गैकभागान्वितम् ।
क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेमहि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ।। ९७ ।।

अर्थ : एका द्रम्मास ३$\frac{१}{२}$ मापें तांदूळ मिळतात. तेवढ्याच पैशांत ८ मापें मूग मिळतात. हे वाणीदादा, मजजवळ फक्त १३ च काकिणी आहेत. तेवढ्यांत १ : २ प्रमाणांत मूग व तांदूळ घेतले तर ते किती येतील ? त्याप्रमाणें पैसे घेऊन मला धान्यें दे म्हणजे चटकन् भोजन करून आम्ही पुढच्या प्रवासास जाऊं, कारण कारवान पुढें जाण्यास निघत आहे !

स्पष्टीकरण : रीतीप्रमाणें तांदुळाची किंमत $= \dfrac{\dfrac{\text{तां. कि.}}{\text{तां. प्र.}} \times \text{तां. विभाग} \times \text{धन}}{\dfrac{\text{तां. कि.}}{\text{तां. प्र.}} \times \text{तां. माप} + \dfrac{\text{मू. कि.}}{\text{मू. प्र.}} \times \text{मू. माप}}$

$$\therefore \text{तांदुळाची किंमत} = \frac{\frac{१}{७/२} \times २ \times \frac{१३}{६४}}{\frac{१}{७/२} \times २ + \frac{१}{८} \times १} = \frac{४}{७} \times \frac{१३}{६४} \div \left\{ \frac{४}{७} + \frac{१}{८} \right\}$$

$$= \frac{१३}{११२} \div \frac{३९}{५६} = \frac{१३}{११२} \times \frac{५६}{३९} = \frac{१}{६} \text{ द्रम्म.}$$

$$\text{मुगांची किंमत} = \frac{१}{८} \times \frac{१३}{६४} \div \frac{३९}{५६} = \frac{१३ \times ५६}{८ \times ६४ \times ३९} = \frac{७}{१९२} \text{ द्रम्म.}$$

$$\text{तांदुळाचें माप} = \frac{२}{\frac{४}{७} + \frac{१}{८}} \times \frac{१३}{६४} = \frac{२ \times ५६ \times १३}{३९ \times ६४} = \frac{७}{१२} \text{ मापें.}$$

$$\text{मुगाचें माप} = \frac{१}{\frac{४}{७} + \frac{१}{८}} \times \frac{१३}{६४} = \frac{७}{२४} \text{ मापें. हें उत्तर.}$$

येथें बैजिक रीतीनें उपपत्ति सिद्ध होते. जर मुगाचें माप **क्ष** धरलें तर तांदुळाचें माप २ **क्ष** पाहिजे. मुगाची किंमत $\frac{\text{क्ष}}{८}$ द्रम्म व तांदुळाची किंमत $\frac{४\text{क्ष}}{७}$ द्रम्म. एकूण किंमत

क्ष $\left(\frac{१}{८} + \frac{४}{७}\right)$ द्रम्म $= \frac{३९}{५६}$ **क्ष**. पण दिलेली किंमत $\frac{१३}{६४}$ द्रम्म आहे.

म्हणून समीकरणानें **क्ष** $\times \frac{३९}{५६} = \frac{१३}{६४}$. $\therefore$ **क्ष** $= \frac{१३}{६४} \times \frac{५६}{३९} = \frac{७}{२४}$ मापें

अर्थात तांदूळ २ **क्ष** $= \frac{७}{१२}$ मापें.

तांदुळाची किंमत $\frac{७}{१२} \times \frac{२}{७} = \frac{१}{६}$ द्रम्म $= १०\frac{२}{३}$ काकिणी.

मुगाची किंमत $\frac{७}{२४} \times \frac{१}{८} = \frac{७}{१९२}$ द्रम्म $= \frac{७}{३}$ काकिणी $= २\frac{१}{३}$ काकिणी.

म्हणून सूत्राची सिद्धता झाली.

उदाहरण २

श्लोक ९८

> कर्पूरस्य वरस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते ।
> वैश्यानंदनचन्दनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत् ।।
> अष्टांशेन तथाऽगरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान् ।
> भागैरेककषोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम् ।। ९८ ।।

अर्थ : उत्तम कापूर २ निष्कास १ पल या दरानें मिळतो. $\frac{१}{८}$ द्रम्मास १ पल चंदन मिळतो व $\frac{१}{८}$ द्रम्मास $\frac{१}{२}$ पल अगरू मिळतो. तर एका निष्कांत हे पदार्थ १ : १६ : ८ या प्रमाणांत घेणें असल्यास ते किती किती येतील व त्यांच्या किमती काय तें, हे वैश्यपुत्रा (आपल्या आईस आनंद देणाऱ्या) जर आम्हांस धूप बनवायचा असेल, तर सांग.

स्पष्टीकरण : वरील रीतीनें पूर्वीप्रमाणेंच, २ निष्क = ३२ द्रम्म धरून,

$$\text{कापराचें मूल्य} = \frac{\frac{३२}{१} \times १}{\frac{३२ \times १}{१} + \frac{१}{८} \times १६ + \frac{१}{८} \times ८ \times २} \times १६$$

$$= \frac{३२ \times १६}{३६} = \frac{१२८}{९} = १४\frac{२}{९} \text{द्रम्म.}$$

$$\text{चंदनाचें मूल्य} = \frac{\frac{१}{८} \times १६ \times १६}{३६} \text{ द्रम्म} = \frac{८}{९} \text{ द्रम्म.}$$

$$\text{अगरूचें मूल्य} = \frac{\frac{१}{८} \times ८ \times २ \times १६}{३६} \text{ द्रम्म} = \frac{८}{९} \text{ द्रम्म.}$$

$$\text{कापराचें माप} = १४\frac{२}{९} \div ३२ = \frac{१२८}{९} \times \frac{१}{३२} \text{ पल} = \frac{४}{९} \text{ पल.}$$

$$\text{चंदनाचें माप} = \frac{८}{९} \times \frac{१}{८} = \frac{१}{९} \text{ पल.}$$

$$\text{अगरूचें माप} = \frac{८}{९} \times \frac{१}{४} = \frac{२}{९} \text{ पल.}$$

हेच उदाहरण बैजिक रीतीनें करू. समजा कापूर क्ष पलें इतका घेतला. तर चंदन १६ क्ष पलें व अगरू ८ क्ष पलें इतका घ्यावयास पाहिजे. यांच्या किंमती पलास ३२ द्रम्म, $\frac{१}{८}$ द्रम्म व $\frac{१}{४}$ द्रम्म होतात, म्हणून सर्व मालाची एकूण किंमत

$३२ क्ष + १६ क्ष \times \frac{१}{८} + ८ क्ष \times \frac{१}{४} = ३६$ क्ष द्रम्मं.

$\therefore$ $३६ क्ष = १६$, तर $क्ष = \frac{४}{९}$ पल.

$\therefore$ कापराचें वजन $\frac{४}{९}$ पल व किंमत $\frac{१२८}{९}$ द्रम्म $= १४\frac{२}{९}$ द्रम्म.

चंदनाचें वजन $\frac{१}{९}$ पल व किंमत $\frac{८}{९}$ द्रम्म. अगरूचें वजन $\frac{२}{९}$ पल व किंमत $\frac{८}{९}$ द्रम्म.

सूत्र : रत्नांची अदलाबदल करणें.

श्लोक ९९

नरघ्नदानोनितरत्नशेषैरिष्टे हृते स्युः खलु मूल्यसंख्याः ।
शेषैर्हृते शेषवधे पृथक्स्थैरभिन्नमूल्यान्यथवा भवन्ति ॥९९॥

अर्थ : मनुष्यसंख्येनें रत्नदानसंख्येस गुणून तो गुणाकार मूळ रत्नांच्या संख्यांतून वजा करावा. ज्या बाक्या राहतील त्यानें इष्ट संख्येस भागावें, म्हणजे रत्नांच्या किंमती मिळतील.
किंवा बाक्यांच्या गुणाकारास बाक्यांनीं भागल्यास रत्नांच्या किंमती मिळतील.

स्पष्टीकरण : या ठिकाणीं इष्ट संख्या कमी अधिक धरल्यानें रत्नांच्या किंमती कमी अधिक होतील. कदाचित् अपूर्णांक किंमतीही होतील. बाक्यांच्या ल. सा. वि. स बाक्यांनीं भागल्यास पूर्ण रत्नांच्या किंमती मिळतील.

उदाहरण : रत्नविनिमयाचें.

श्लोक १००

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतम् ।
सद्वज्राणि च पंच रत्नवणिजामेषां चतुर्णां धनम् ॥
संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्वैकमेकं मिथो ।
जातास्तुल्यधनाः पृथग्वद सखे तद्रत्नमूल्यानि मे ॥ १०० ॥

भास्कराचार्यांच्या रीतीनें उत्तर शेवटीं दिलें आहे. अर्थ व दुसऱ्या रीती पुढे पहा.

अर्थ : चार व्यापारी होते. त्यांपैकीं एकाजवळ आठ माणकें, दुसऱ्याजवळ दहा इंद्रनील, तिसऱ्याजवळ शंभर मोत्यें व चौथ्याजवळ पांच हिरे होते. ते प्रवासास निघाले असतांना त्यांची मैत्री जमून, त्यांपैकीं प्रत्येकानें, आपापल्या रत्नांतून एकेक रत्न दुसऱ्यास दिलें. त्यामुळे प्रत्येकाजवळील धन सारखें झालें. तर हे मित्रा, त्या रत्नांच्या किंमती काय ?

स्पष्टीकरण : उत्तराची गणिती रीत १ ली :

रत्नांची अदलाबदल करण्यापूर्वीं पहिल्याजवळ ८ माणकें, दुसऱ्याजवळ १० इंद्रनील,

तिसऱ्याजवळ १०० मोत्यें व चौथ्याजवळ ५ हिरे होते. प्रत्येक व्यापाऱ्यास, त्याच्यां-जवळील रत्नांतून, दुसऱ्यांना तीन तीन रत्नें द्यावी लागली. म्हणून अदलाबदल केल्यानंतर,

१ ल्या व्यापाऱ्याजवळ	५ मा. +	१ इं. +	१ मो. +	हिरा १	एवढी	रत्नें	होती.
२ ऱ्या	,,	१ मा. +	७ इं. +	१ मो. +	हिरा १	,,	,,	,,
३ ऱ्या	,,	१ मा. +	१ इं. +	९७ मो. +	हिरा १	,,	,,	,,
४ थ्या	,,	१ मा. +	१ इं. +	१ मो. +	हिरे २	,,	,,	,,

म्हणजेच १ ल्या जवळ	४ माणकें	+ प्रत्येक	प्रकारचें	एकेक	रत्न	होतें.
२ ऱ्या	६ इंद्रनील	+ ,,	,,	,,	,,	,,
३ ऱ्या	९६ मोत्यें	+ ,,	,,	,,	,,	,,
४ थ्या	१ हिरा	+ ,,	,,	,,	,,	,,

आतां प्रत्येकाचीं संपत्ति सारखी आहे. यांतलीं १ मा. + १ इं. + १ मो. + १ हिरा यांची किंमत जर प्रत्येकाच्या संपत्तींतून काढून टाकली तर शिलकी रत्नांची किंमत समान असली पाहिजे.

∴ किंमतीनें, ४ माणकें = ६ इंद्रनील = ९६ मोत्यें = १ हिरा, असें प्रमाण बसतें. जर १ मोत्यास १ रुपया किंमत धरली तर एका हिऱ्यास ९६ रुपये, एका माणकास २४ रुपये व एका इंद्रनीलास १६ रुपये याप्रमाणें रत्नांच्या किंमती झाल्या.

रीत २ : उत्तराची वैजिक रीत. समजा, माणकास **अ** रुपये, इंद्रनीलास **ब** रुपये, मोत्यास **क** रुपये व हिऱ्यास **ड** रुपये पडतात.

∴ पहिल्या	व्यापाऱ्याजवळचें	विनिमयापूर्वीचे	धन	८**अ** रुपये.
दुसऱ्या	,,	,,	,,	१०**ब** रुपये.
तिसऱ्या	,,	,,	,,	१००**क** रुपये.
चौथ्या	,,	,,	,,	५**ड** रुपये.

पहिल्या	व्यापाऱ्याचें	विनिमयानंतरचे	धन	५ **अ**+**ब**+**क**+**ड** रु.
दुसऱ्या	,,	,,	,,	**अ**+७ **ब**+**क**+**ड** रु.
तिसऱ्या	,,	,,	,,	**अ**+**ब**+९७ **क**+**ड** रु.
चौथ्या	,,	,,	,,	**अ**+**ब**+**क**+२ **ड** रु.

पण हीं सर्व धनें (रत्नांच्या किंमती) समान आहेत.

∴ ५ **अ** + **ब** + **क** + **ड** = **अ** + ७ **ब** + **क** + **ड** = **अ** + **ब** + ९७ **क** + **ड**
= **अ** + **ब** + **क** + २ **ड**.

∴ ४ **अ** = ६ **ब** = ९६ **क** = **ड**.

जर **क** = १ रु. धरला, तर **अ** = २४, **ब** = १६ व **ड** ९६, रुपये हें उत्तर.

रीत ३ : भास्कराचार्यांची रीत. रत्नसंख्या ८, १०, १०० व ५. दानसंख्या १ व मनुष्यसंख्या ४.

∴ ८−४×१=४, १०−४×१=६, १००−४×१=९६ व ५−४×१=१

ह्या बाक्या राहिल्या. आतां इष्ट संख्या ९६ धरली तर

माणकाची किंमत $\frac{९६}{४}$ = २४, नीळाची किंमत $\frac{९६}{६}$ = १६,

मोत्याची किंमत $\frac{९६}{९६}$ = १, व हिऱ्याची किंमत $\frac{९६}{१}$ = ९६ हें उत्तर.

किंवा वाक्यांचा गुणाकार करून ४ × ६ × ९६ × १ = २३०४ होतात. यास वाक्यांनी भागून ५७६, ३८४, २४, २३०४ येतात. रत्नांच्या किंमती याच प्रमाणांत होतील व मोत्याची किंमत १ रु. धरल्यास त्या किंमती अनुक्रमे २४, १६, १, ९६ अशा होतील.

सूत्र : शुद्ध सोन्याचें वजन काढणें.

श्लोक १०१

सुवर्णवर्णाहतियोगराशौ । स्वर्णैक्यभक्ते कनकैक्यवर्णः ।।
वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते । वर्णोद्धृते शोधित हेमसंख्या ।। १०१ ।।

अर्थ : (दोन प्रकारचें किंवा अनेक प्रकारचें सोनें मिश्र केल्यास मिश्रणाचा कस व वजन पुढीलप्रमाणें मिळतें.) प्रत्येक प्रकारच्या सोन्यास त्याच्या कसानें गुणावें. गुणाकारांची बेरीज करून एकूण सुवर्णाच्या वजनानें भागावें म्हणजे मिश्रणाचा कस मिळतो. शोधित सुवर्णानें भागल्यास शुद्ध सोन्याचा कस येतो व कसानें भागल्यास शुद्ध सोन्याचें वजन मिळतें.

स्पष्टीकरण : मिश्र सोन्याचा कस **क्ष** धरल्यास व एकूण वजन **य** मासे धरल्यास,

$\text{क्षय} = \text{क्ष}_1\text{य}_1 + \text{क्ष}_2\text{य}_2 + \text{क्ष}_3\text{य}_3 + \ldots\ldots$ हा नियम लागेल.

यांत उजवी बाजू ठाऊक आहे व एकूण **य** ठाऊक आहे.

म्हणून $\text{क्ष} = \frac{\text{क्ष}_1\text{य}_1 + \text{क्ष}_2\text{य}_2 + \ldots\ldots}{\text{य}}$ हा वर्ण आला. (वर्ण = कस)

हा मिश्रणाचा कस मिळाला. जर शुद्ध सोन्याचा कस पाहिजे असेल तर वरील बेरजेस शुद्ध सोन्याच्या वजनानें भागावें. म्हणजे

$\text{क्ष} = \frac{\text{क्ष}_1\text{य}_1 + \text{क्ष}_2\text{य}_2 + \ldots\ldots}{\text{शुद्ध सोन्याचें वजन}}$ = वर्ण (शुद्ध सोन्याचा).

या उलट शुद्ध सोन्याचा कस ठाऊक असल्यास वजन काढण्यासाठी

$\text{य} = \frac{\text{क्ष}_1\text{य}_1 + \text{क्ष}_2\text{य}_2 + \ldots\ldots}{\text{क्ष (कस)}}$ = सोन्याचें वजन.

उदाहरण

श्लोक १०२

विश्वार्करुद्रदशवर्णसुवर्णमाषाः । दिग्वेदलोचनयुगप्रमिताः क्रमेण ।।
आवर्तितेषु वद तेषु सुवर्णवर्णः । तूर्णं सुवर्णगणितज्ञ वणिग्भवेत्कः ।।१०२।।

अर्थ : १३ कसांचें १० मासे, १२ कसांचे ४ मासे, ११ कसांचे २ मासे व १० कसांचे ४ मासे, हीं सर्व चार प्रकारची सोनें, एकत्र वितळविलीं असतां मिश्रणाचा कस काय होईल ? हें २० मासे सोनें शुद्ध केलें असतां फक्त १६ मासे भरतें तर त्या शोधित सुवर्णाचा कस काय ? जर मिश्र सोनें शुद्ध केल्यावर त्याला १६ कस लागतो, तर सोन्याचे वजन काय होईल ?

स्पष्टीकरण : वरील सूत्रानें,

$$\text{मिश्र सोन्याचा वर्ण} = \frac{१३\times१०+१२\times४+११\times२+१०\times४}{१०+४+२+४} = \frac{२४०}{२०} = १२$$

अर्थात् तारतम्यानें मिश्रणाचा कस १३ व १० यांचे दरम्यान असणार हें उघड आहे. मिश्रणाचा कस ही एक प्रकारची सरासरीच आहे. शुद्ध सोन्याचा कस अर्थात् कुठल्याही प्रकारच्या सोन्यापेक्षां अधिक असणार. ४ मासे हीण जळून १६ मासे शुद्ध सोनें राहिलें तर शुद्ध सुवर्णाचा वर्ण $= \frac{२४०}{१६} =$ १५ आला. तसेंच शुद्ध सोन्याचा (वर्ण) कस १६ झाल्यास वजन $= \frac{२४०}{१६} =$ १५ मासे हें उत्तर येते. येथें ५ मासे हीण जळून गेलें.

सूत्र : मिश्रणाचा कस व कांहीं भागांचे कस ठाऊक असल्यास अज्ञात कस (वजन ठाऊक असतां) काढणें.

श्लोक १०३

स्वर्णैक्यनिघ्नाद्युतिजातवर्णात् । सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात् ।।
अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाप्तम् । अज्ञातवर्णस्य भवेत्प्रमाणम् ।। १०३ ।।

अर्थ : मिश्रित सोन्याच्या कसास एकूण सोन्याच्या वजनानें गुणावें. त्यांतून ज्या सोन्यांचे कस व वजनें ठाऊक आहेत त्यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा करावी. बाकीस अज्ञात कसाच्या सुवर्णभारानें भागावें म्हणजे त्याचा कस मिळतो.

स्पष्टीकरण : वरील रीत ही श्लोक १०१ च्या सूत्राचीच निराळी आवृत्ति आहे. जर **य** वजनाच्या सोन्याचा कस **क्ष** असेल व $क्ष_1$, $य_1$; $क्ष_2$, $य_2$ इत्यादी यांना पूर्वीचेच अर्थ असतील तर चार प्रकारचीं सुवर्णें मिश्र असल्यास,

$$क्षय - क्ष_1य_1 - क्ष_2य_2 - क्ष_3य_3 = क्ष_4य_4.$$

$$\therefore\ क्ष_4 = \frac{क्षय - क्ष_1य_1 - क्ष_2य_2 - क्ष_3य_3}{य_4}$$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १०४

दशेशवर्णा वसुनेत्रमाषा । अज्ञातवर्णस्य षडेतदैक्ये ।
जातं सखे द्वादशकं सुवर्णम् । अज्ञातवर्णस्य वद प्रमाणम् ।। १०४ ।।

अर्थ : १० कसांचे ८ मासे, ११ कसांचे २ मासे, व अज्ञात कसांचे ६ मासे यांच्या मिश्रणाचा कस १२ लागल्यास, ६ मासे सोन्याचा कस काय? वरील सूत्रानें

$$\text{अज्ञातवर्ण} = \frac{१ \times १२ - १० \times ८ - \times २}{६} = \frac{१९२ - १०२}{६} = \frac{९०}{६} = १५.$$

सूत्र : मिश्र कसाच्या सोन्यांतील विशिष्ट कसाच्या सोन्याचें वजन काढणें.

श्लोक १०५ अ

स्वर्णैक्यनिघ्नो युतिजातवर्णः । स्वर्णघ्नवर्णैक्यवियोजितोऽसौ ।
अहेमवर्णाग्निजयोगवर्ण । विश्लेषभक्तोऽविदिताग्निजं स्यात् ॥१०५ अ॥

अर्थ : मिश्रणाच्या कसानें ज्ञात कसांच्या सुवर्णमानास गुणावें. त्यांतून ज्ञात सुवर्ण व त्यांचे कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा द्यावी व बाकीस अज्ञात सोन्याचा कस व मिश्र कस यांच्या फरकानें भागावें म्हणजे अज्ञाताचें वजन समजतें.

स्पष्टीकरण : समजा तीन सोन्यांचे कस $क्ष_1$, $क्ष_2$, $क्ष_3$ आहेत व मिश्रवर्ण **क्ष** आहे व वजनें $य_1$, $य_2$ व अज्ञाताचें **य** आहे. तर

$क्ष(य_1 + य_2 + य) = क्ष_1 य_1 + क्ष_2 य_2 + क्ष_3 य$

$\therefore$ $य(क्ष_3 - क्ष) = क्ष(य_1 + य_2) - क्ष_1 य_1 - क्ष_2 य_2$, हें सूत्र सिद्ध.

उदाहरण

श्लोक १०५

दशेंद्रवर्णा गुणचन्द्रमाषाः । किञ्चित्तथा षोडशकस्य तेषाम् ॥
जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णम् । कतीह ते षोडशवर्णमाषाः ॥ १०५ ॥

(कांहीं शब्दांचे अर्थ : इंद्र = १४, गुण = ३, चंद्र = १, माष = मासे (वजन), कति = किती ?)

अर्थ : १० कसांचे ३ मासे व १४ कसांचे एक मासा एवढ्या सोन्यांत १६ कसांचें कांहीं सोनें मिसळलें. मिश्रणाचा कस १२ झाल्यास १६ कसांचें सोनें किती ?

स्पष्टीकरण : १ ली रीत :

आपण प्रत्येक प्रकारचे सोनें १२ कसांच्या सोन्यांत रूपांतरित करू.

म्हणून, १० कसांचे ३ मासे सोनें = १२ कसांचे $२\frac{१}{२}$ मासे सोनें (कच्चे ३०).

१४ कसाचे १ मासा सोनें = १२ कसाचे $\frac{७}{६}$ मासे सोने (कच्चे १४).

$\therefore$ बेरीज करून, पहिलें ४ मासे सोनें = १२ कसाचे $३\frac{२}{३}$ मासे सोनें.

अर्थात १२ कसाच्या सोन्यांत $\frac{१}{३}$ मासा इतकी घट आली. ही घट १६ कसांचं सोनें मिसळून नाहींशीं केली पाहिजे. आतां

१६ कसांचा १ मासा = १२ कसांचे $\frac{४}{३}$ मासे. (कच्चे १६).

म्हणजे १६ कसांचा १ मासा, १२ कसांच्या १ माशांत, $\frac{१}{३}$ मासा वाढावा करतो. आपणांस तितकीच घट भरून काढणें आहे. म्हणून १६ कसांचें १ मासा सोनें घ्यावें.

टीप : कच्चे म्हणजे कस व वजन (तोळे किंवा मासे) यांचा गुणाकार.

२ री रीत : समजा, १६ कसांचे **क्ष** मासे सोनें घेतलें, तर वितळण्यापूर्वी व नंतर कच्चे सारखेच होणार.

$\therefore$ १०×३ + १४×१ + १६ × **क्ष** = १२ (३+१+**क्ष**)

$\therefore$ ४४ + १६ **क्ष** = ४८ + १२ **क्ष**. $\therefore$ ४ **क्ष** = ४ म्हणजेच **क्ष** = १.

अर्थात् १६ कसांचें सोनें १ मासा. हे उत्तर

भास्कराचार्यचें सूत्र : मिश्रवर्ण : = $\frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोगः}}{\text{स्वर्णैक्यम्}}$

अर्थ : एकत्रित सोन्याचा कस = $\frac{\text{वजन} \times \text{कस अशा सर्व गुणाकारांची बेरीज}}{\text{एकूण वजन}}$

अज्ञात सोन्याचें वजन **क्ष** मासे धरून व वरील सूत्र लावून

$१२ = \frac{३० + १४ + १६\,\text{क्ष}}{४ + \text{क्ष}}$ $\therefore$ ४८ + १२ **क्ष** = ४४ + १६ **क्ष**

$\therefore$ **क्ष** = १. ही रीत पहिल्या रीतीप्रमाणेंच आहे.

सूत्र : मिश्रणांतल्या सोन्यांचीं वजनें काढणें.

श्लोक १०६

साध्येनोनोऽनल्पवर्णो विधेयः । साध्यो वर्णः स्वल्पवर्णोनितश्च ।।
इष्टक्षुण्णे शेषके स्वर्णमाने । स्यातां स्वल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ।। १०६ ।।

अर्थ : सर्वांत मोठ्या कसांतून मिश्र कस वजा द्यावा. मिश्रकसांतून लहाना कस वजा द्यावा. ज्या बाक्या राहतील त्यांना इष्टसंख्येनें गुणावें म्हणजे अनुक्रमें लहान व मोठ्या कसाच्या सोन्याचीं वजनें मिळतात.

स्पष्टीकरण : समजा $क्ष_१$, $क्ष_२$ ($क्ष_१ > क्ष_२$) अशा कसांचीं अज्ञात वजनाचीं सुवर्णें मिश्र केली असतां कस **क्ष** लागला व एकूण वजन **य** आहे. तर $य_१$, $य_२$ वजनें असल्यास

$क्ष_१य_१ + क्ष_२य_२ = क्ष\,(य_१ + य_२)$.

$\therefore य_१\,(क्ष_१ - क्ष) = य_२\,(क्ष - क्ष_२)$

$\therefore \frac{य_१}{य_२} = \frac{क्ष - क्ष_२}{क्ष_१ - क्ष}$ $\therefore$ $य_१$ हा $क्ष - क्ष_२$ च्या प्रमाणांत व $य_२$ हा $क्ष_१ - क्ष$ या प्रमाणांत आहे. एकूण वजन $य = य_१ + य_२$ हे $क्ष_१ - क्ष_२$ च्या प्रमाणांत आहे

$$\therefore\ य_1 = य\ \frac{(क्ष - क्ष_2)}{क्ष_1 - क्ष_2}, \qquad य_2 = य\ \frac{(क्ष_1 - क्ष)}{क्ष_1 - क्ष_2}$$ हें सूत्र सिद्ध.

उदाहरण

श्लोक १०७ अ

हाटकगुटिके षोडशदशवर्णे तद्युतौ सखे जातम् ।
द्वादशवर्णसुवर्णं ब्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ।। १०७ (अ)।।

अर्थ : हे मित्रा, सोन्याच्या दोन गोळ्या अनुक्रमें १६ व १० कसांच्या असून त्यांच्या मिश्रणाचा कस १२ लागतो. तर गोळ्यांचीं वजनें किती ?

समजा मिश्रणाचें वजन **य** मासे आहे, तर

$$य_1 = य \times \frac{(१२ - १०)}{१६ - १०} = \frac{य}{३},\ य_2 = य \times \frac{(१६ - १२)}{१६ - १०} = \frac{२}{३} य.$$

म्हणजे मोठ्या व लहान कसांची सुवर्णे १ : २ या प्रमाणांत मिसळलीं तर मिश्रणाचा कस १२ येतो. वरील स्पष्टीकरणांत बीजगणितांतील योगाचा (componendo) नियम लावला आहे.

सूत्र : दिलेल्या वस्तुसंग्रहांतून विशिष्ट संख्येइतक्या वस्तु दर वेळीं घेऊन त्यांचे संयोग (combinations) केल्यास किती संयोग होतील तें काढणें.

श्लोक १०७ ब, १०८ व १०९

एकाद्येकोत्तरा अंका व्यस्ता भाज्याः क्रमस्थितैः ।
परः पूर्वेण संगुण्यस्तत्परस्तेन तेन च ।।१०७।।
एकद्वित्र्यादिभेदाः स्युरिदं साधारणं स्मृतम् ।
छन्दश्चित्त्युत्तरे छन्दस्युपयोगोऽस्य तद्विदाम् ।। १०८ ।।
मूषावहन भेदादौ खण्डमेरौ च शिल्पके ।
वैद्यके रसभेदीये तन्नोक्तं विस्तृतेर्भयात् ।। १०९ ।।

अर्थ : एकापुढें एक असे एकानें वाढते अंक उलट क्रमानें, वस्तुसंग्रहांकापासून सुरू करून लिहावे. त्यांना अनुक्रमें १, २, ३, ... इत्यादींनीं भागावे. अशा संयोगांकाइतक्या अपूर्णांकांचा गुणाकार दुसऱ्यास पहिल्यानें, त्या पुढच्यास दुसऱ्या व पहिल्याच्या गुणाकारानें याप्रमाणें गुणाकार गुणून मांडावा म्हणजे संयोगफल येतें. किंवा संग्रहांकापासून एकोन करून जितक्या वस्तु संयोगांत हव्यातितक्या अंकांचा गुणाकार करावा. त्याला एकादि एकवृद्धि अशा तितक्याच संख्यांच्या गुणाकारानें भागावें म्हणजे संयोगफल येतें. एक वस्तु, दोन वस्तु, तीन वस्तु संयोगांत घेण्यासाठीं हाच नियम सर्वसाधारणपणें लागतो.

दिलेल्या अक्षरप्रकारांतून निरनिराळे किती छंद होतील तें जाणण्यासाटीं छंदोरचनाकारांना याचा उपयोग आहे. खिडक्या किंवा गवाक्षें यांचे भेद, खंडमेरु प्रकरणीं, शिल्पशास्त्र, वैद्यक, रसभेद (मात्रांचे प्रकार) यांत या सूत्राचे उपयोग आहेत ते विस्तारभयास्तव सांगितले नाहींत.

स्पष्टीकरण : दिलेल्या वस्तूंची संख्या **न** असून मेल किंवा संयोग करतांना **र** वस्तु ग्राह्य असतील तर आधुनिक बीजगणिताचें सूत्र असें आहे.

$$\text{संयोगफल} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)\ (\text{न}-२)\ldots\ldots(\text{न}-\text{र}+१)}{१\times२\times३\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\text{र}}$$

यालाच नवीन चिन्ह $\binom{\text{न}}{\text{र}}$ असें वापरलें जातें. भास्करीय सूत्राप्रमाणें.

$$\binom{\text{न}}{१} = \frac{\text{न}}{१},\quad \binom{\text{न}}{२} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\times२},\quad \binom{\text{न}}{३} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\times२\times३};$$

याप्रमाणें संयोगफलें मिळतात. सूत्राची फक्त पहिली ओळ अस्पष्ट अर्थाची आहे. एकाद्येकोत्तरा अंकाः म्हणजे एकापेक्षां एक वरचढ अंक घ्यावे व ते उलट क्रमानें लिहावें असें म्हटलें आहे. पण ते कुठून कुठपर्यंत घ्यावे याबद्दल निश्चित निर्देश नाहीं.

उदाहरण १

श्लोक ११०

प्रस्तारे मित्र गायत्र्याः स्युः पादे व्यक्तयः कति ।
एकादिगुरवश्चाशु कथ्यतां तत्पृथक् पृथक् ।। ११० ।।

अर्थ : हे मित्रा, गायत्री छंदाच्या चतुर्थ चरणांत ६ अक्षरें असतात. त्यात १ गुरु, २ गुरु, ३ गुरु असे प्रकार घेतल्यास प्रत्येक प्रकारचे छंद (संयोग) किती?
चतुर्थ चरणांत ६ लघु अक्षरे असतील तर संयोग ललललल असा १ च होईल. एक गुरु व पांच लघु यांनीं चरण बनला असेल तर तसे ६ संयोग पुढे दाखविल्याप्रमाणें होतील. (ल = लघु, ग = गुरु).

१ **गलललल**, २ **लगललल**, ३ **ललगलल**,
४ **लललगल**, ५ **ललललग**, ६ **ललललग.**
याच पद्धतीनें चरणांत २ गुरु व ४ लघु असतील तर मेळ किंवा संयोग एकूण १५ होतील.

स्पष्टीकरण : वरील रीतीनें १ गुरु अक्षर असणाऱ्या छंदांची संख्या $\frac{६}{१} = ६$

२ गुरु अक्षरें असणाऱ्या छंदांची संख्या $\binom{६}{२} = \frac{६ \times ५}{१ \times २} = १५$

३ ,, ,, ,, $\binom{६}{३} = \frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३} = २०$

४ ,, ,, ,, $\binom{६}{४} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३}{१ \times २ \times ३ \times ४} = १५$

५ ,, ,, ,, $\binom{६}{५} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५} = ६$

सर्व ,, ,, ,, $\binom{६}{६} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६} = १$

नवीन पद्धतींतलें सूत्र $\binom{न}{र} = \frac{न!}{र!(न-र)!}$

यांत **न** ! म्हणजे क्रमगुणाकार $१ \times २ \times ३ \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times$ **न**.

या सूत्रांत $\binom{६}{४} = \binom{६}{२}$, $\binom{६}{५} = \binom{६}{१}$, $\binom{६}{६} = \binom{६}{०}$

या चिन्हामुळें बरेंच वायां जाणारें लेखन वाचतें.

$\binom{६}{०}$ चा अर्थ असा कीं चरण सर्व लघूंचा बनलेला आहे व असा १ च संयोग आहे. हें शब्दांत सांगितलें नाहीं इतकेंच.

म्हणून एकूण चरण प्रकार $१ + ६ + १५ + २० + १५ + ६ + १ = ६४ = २^{६}$

वरील नियमाप्रमाणें $\binom{न}{०} + \binom{न}{१} + \binom{न}{२} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{न}{न} = २^{न} - १$

असेच चार चरणांचे लघुगुरु भेद केल्यास $६४ \times ६४ \times ६४ \times ६४ = १६७७७२१६$ इतके प्रकार होतील. (प्रस्तारे = मांडणी केल्यास).

उदाहरण २

श्लोक १११

एकद्वित्र्यादिमूषा वहनमितिमहो ब्रूहि मे भूमिभर्तुः ।
हर्म्ये रम्ये ऽष्टमूषे चतुरविरचितेश्लक्ष्णशालाविशाले ॥
एकद्वित्र्यादियुक्त्या मधुरकटुकषायाम्लकक्षारतिक्तैः ।
एकस्मिन्षड्रसैः स्युर्गणक कति वद व्यंजने व्यक्तिभेदाः ॥ १११ ॥

अर्थ : एका राजाच्या रम्य अशा राजवाड्यास आठ दरवाजे होते. त्या राजवाड्यात चतुर अभियांत्रिकांनीं (इंजिनियरांनीं) गुळगुळीत व मोठे चौक बांधले होते. वारा येण्यासाठीं जर १ दरवाजा, २ दरवाजे, ३ दरवाजे याप्रमाणें उघडले तर एकूण पवनप्रकार किती होतील ? तसेंच गोड, कडू, तुरट, आंवट, खारट व तिखट यांपैकीं १, २, ३, ४, ५, ६ रस एकत्र करून चटण्यांचे प्रकार किती होतील तें, हे गणका, सांग.

स्पष्टीकरण : वरील संयोगनियमानें.

$\binom{८}{१}, \binom{८}{२}, \binom{८}{३} \ldots\ldots\ldots \binom{८}{८}$ आणि $\binom{८}{०}$ इतके प्रकार संभवतात.

त्यांत $\binom{८}{०} = \binom{८}{८} = १$, $\binom{८}{१} = \binom{८}{७} = ८$, $\binom{८}{२} = \binom{८}{६} = २८$,

$\binom{८}{३} = \binom{८}{५} = ५६$, आणि $\binom{८}{४} = ७०$.

एकूण प्रकार $२+१६+५६+११२+७० = २५६ = २^{८}$.
दुसऱ्या उदाहरणांत, ११० व्या श्लोकाप्रमाणेंच, $२ + १२ + ३० + २० = ६४ = २^{६}$ इतके चटण्यांचे प्रकार होतील.

प्रकरण २५ अ

खंडमेरु

भास्कराचार्यांनें खंडमेरूचा उल्लेख केला आहे. हा खंडमेरु प्राचीन गणितज्ञांना माहीत होता. पिंगलाचार्यांनें छंदोरचनेंत याचा उपयोग केला आहे. आधुनिक काळीं हा पास्कलचा त्रिकोण या संज्ञेनें ओळखला जातो. त्यांत प्रत्येक ओळीचा संबंध पुढील ओळीशीं असतो. न्यूटनच्या द्विपद सिद्धातांतले अंकीय गुणक प्रत्येक ओळीत मांडले जातात. सोबतची पास्कल त्रिकोण आकृति १ पाहा.

पास्कलचा त्रिकोण

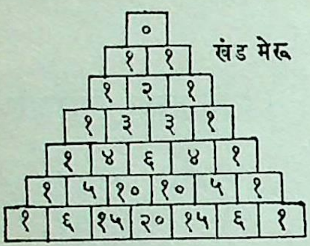
$(क्ष+अ)^{०}$	०						
$(क्ष+अ)^{१}$	१	१					
$(क्ष+अ)^{२}$	१	२	१				
$(क्ष+अ)^{३}$	१	३	३	१			
$(क्ष+अ)^{४}$	१	४	६	४	१		
$(क्ष+अ)^{५}$	१	५	१०	१०	५	१	
$(क्ष+अ)^{६}$	१	६	१५	२०	१५	६	१

आकृती १

या त्रिकोणाच्या पहिल्या ओळींत (क्ष+अ) याचा ० घात केल्यास त्यांत क्ष, अ यांचे गुणक ० होतील हें सांगितलें आहे. दुसऱ्या ओळींत $(क्ष+अ)^{१}$ अंकीय गुणक १, १ असे आहेत. तिसऱ्या ओळींत $(क्ष+अ)^{२} = क्ष^{२} + २क्षअ + य^{२}$ यांत अंकीय गुणक १, २, १ आहेत. $(क्ष+अ)^{३}$ यांत १, ३, ३, १ हे अंकीय गुणक $क्ष^{३}$, $क्ष^{२}अ$, $क्षअ^{२}$, अ यांचे समजावें. त्याचप्रमाणें पुढील ओळींचें समजावें.

मागील आकृतीची गंमत अशी आहे कीं चौथ्या ओळींतले अंक तिसऱ्या ओळीवरून मिळतात. उदाहरणार्थ चौथ्या ओळींतला पहिला अंक १ आहे. पुढील अंक ३ हा त्याच्या डोक्यावरील २ व दोहोंच्या डावे बाजूचा १ यांची बेरीज आहे. (त्याच ओळींतला) तिसरा अंक हा त्याच्या डोक्यावरील १ व डावे बाजूचा २ यांच्या बेरजेनें बनला आहे. सातव्या ओळींतला २० हा अंक त्यांच्या डोक्यावरील १० व १० च्या डावे बाजूचे १० यांच्या बेरजेनें झाले आहेत. त्याचें मूळातील सूत्र

$$\binom{\text{न}}{\text{र}} + \binom{\text{न}}{\text{र}-१} = \binom{\text{न}+१}{\text{र}}$$ हें आहे.



आकृती २

भास्कराच्या काळीं हा मेरु त्रिकोण रूपानें न लिहितां मेरूप्रमाणें लिहीत. (सोबतची आकृति २ पहा). हा मेरु. पास्कल त्रिकोणाप्रमाणे पाहिजे तितका वाढवितां येतो विशेष म्हणजे हा खंडमेरु ब्रह्मगुप्तास माहीत होता.

प्रकरण २६

श्रेढीव्यवहार

या प्रकरणांत नियमबद्ध अंकांची श्रेढि (सोपान) असेल तर त्यांचें संकलन करण्याचे नियम सांगितले आहेत.

श्लोक ११२

सैकपदघ्नपदार्धमथैका- । द्यंकयुतिः किल संकलिताख्या ।।
सा द्वियुतेन पदेन विनिघ्नी । स्यात् त्रिहृता खलु संकलितैक्यम् ।।११२।।

अर्थ : (पद = संख्याची संख्या, संकलित = एकादि अंकांची बेरीज).
१ पासून प्रारंभ होणाऱ्या १+२+३+४ .... अशा **न** संख्यांची बेरीज

$(\text{न} + १) \times \frac{\text{न}}{२}$ या सूत्रानें मिळते. तिला संकलित म्हणतात.

तसेंच हीं संकलितें १ + ३ + ६ + १० + . . . अशा **न** पदांची बेरीज किती ?
संकलितास (न + २) यांनीं गुणून तीननें भागावें म्हणजे संकलितैक्य मिळतें.
त्याचें सूत्र $\frac{\text{न} \times (\text{न}+१) \times (\text{न}+२)}{२ \times ३}$ असे आहे.

उदाहरण

लोक ११३

> एकादीनां नवांतानां पृथक् संकलितानि मे ।
> तेषां संकलितैक्यानि प्रचक्ष्व गणक द्रुतम् ।। ११३ ।।

अर्थ : एकपासून नऊपर्यंतच्या संख्यांची बेरीज काय ?

तसेंच १+(१+२) + (१+२+३)+ .... + (१+२+३+.......+९)
या नऊ संकलितांची बेरीज काय ? हे गणका, हें तूं सत्वर सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें, संकलित $= \frac{(९+१)\times९}{२} = ४५$

संकलितैक्य $= \frac{४५ \times (९+२)}{३} = १५ \times ११ = १६५.$

नवीन बीजगणितांत याला $\Sigma\, n$ व $\Sigma \frac{n\,(n+1)}{2}$ म्हणतात. या चिन्हाचें नांव सिग्मा

असें आहे. यांतला पहिला सिग्मा ही गणितश्रेढि आहे. दुसराही श्रेढीचाच प्रकार आहे.

येथें गणितश्रेढींतील संख्यांचा नियम सिद्ध करूं.

समजा आदिधन (प्रथमपद) **अ** आहे. चय म्हणजे (कोणतेंही पद–पूर्वपद) हें **ब** इतकें आहे आणि गच्छ = पदसंख्या **न** आहे. तर **न** पदांची बेरीज किती ?

जर बेरीज **स** = अ + (अ + ब) + (अ + २ब) + ...+ (अ + $\overline{न - १}$ ब) (१)
तसेंच अंत्यधन जर **त** मानलें तर श्रेढि त+(त−ब)+(त−२ ब)+...अशी होईल.
∴ स = त + (त−ब) + (त − २ ब) + ... + (त − $\overline{न - १}$ ब) (२)
समीकरणें (१) व (२) यांच्या बेरजेनें,
२ स = (अ+त) + (अ+त) + (अ+त) + ...न वेळां.

$= न\,(अ+त) \therefore स = \frac{न}{२}\,(अ+त).$

जर आदिधन १ व अंत्यधन **न** असेल, तर स $= \frac{न(न+१)}{२}$ हें सूत्र सिद्ध.

संकलितैक्याच्या सारणीसाठीं जुन्या पद्धतींत प्रथम वर्गैक्य (Σn^2) व घनैक्य (Σn^3) या सूत्रांचा वापर करावा लागतो. पण **गणितीय उद्‌गमन** पद्धती वापरली (mathematical induction) तर त्यांचीही जरुरी राहात नाहीं. संकलिताचे सूत्रच गृहीत धरल्यास चालतें.

समजा $१+(१+२)+(१+२+३)+\ldots$न पदापर्यंत $= \frac{न(न+१)(न+२)}{६}$

हें **न = म** यासाठी सत्य आहे, तर

$$१+(३)+(६)+\ldots\ldots+\frac{म(म+१)}{२}=\frac{म(म+१)(म+२)}{६}.$$

यांत **म** ऐवजीं उजव्या बाजूस **म+१** लिहिल्यास, म्हणजे **म+१** पदांची बेरीज केल्यास, ती बेरीज $\frac{(म+१)(म+२)(म+३)}{६}$ इतकी आली पाहिजे.

$\therefore$ $१+३+६+१०+\ldots\ldots \frac{म(म+१)}{२}+\frac{(म+१)(म+२)}{२}$ यांची किंमतही तितकीच झाली पाहिजे. ही बेरीज $\frac{म(म+१)(म+२)}{६}+\frac{(म+१)(म+२)}{२}$ इतकी होईल. म्हणजेच $\frac{(म+१)(म+२)}{२}\times\left(\frac{म}{३}+१\right)=\frac{(म+१)(म+२)(म+३)}{६}.$

आतां हें सूत्र **म**=१, **म**=२, **म**=३ यांसाठी सत्य आहे. आणि जर तें **म** च्या कोणत्याही किंमतीसाठीं सत्य असेल तर वरील विवेचनावरून **म+१** यासाठींही सत्य असलेच पाहिजे म्हणजेच **म** च्या सर्व पूर्णांकी किंमतींसाठीं हे सूत्र सत्य आहे.

सूत्र : वर्गैक्य म्हणजे $१^२+२^२+३^२+४^२+\ldots\ldots\ldots\ldots$अशा वर्गांची बेरीज. यालाच कृतियोग असेंही म्हणतात. तसेंच $१^३+२^३+३^३+\ldots\ldots\ldots$ यांच्या बेरजेस घनैक्य किंवा घनयोग म्हणतात.

श्लोक ११४

> **द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तम् । संकलितेन हतं कृतियोगः ।।**
> **संकलितस्य कृतेः सममेका- । द्यंकघनैक्यमुदाहृतमाद्यैः ।। ११४ ।।**

अर्थ : वर्गैक्यांत जितकी पदसंख्या असेल तिच्या दुप्पटींत एक मिळवून त्यास ३ नें भागावें व येणाऱ्या भागास संकलितानें गुणावें म्हणजे वर्गांची बेरीज येते. तसेच एकादि संकलिताचा वर्ग केल्यास एकादि घनांची बेरीज येते.

स्पष्टीकरण : $१^२+२^२+३^२+\ldots\ldots+न^२=\frac{न(न+१)(२न+१)}{६}$ हे वर्गैक्य सूत्र झालें.

तसेंच $१^३+२^३+३^३+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots न^३ = \frac{न^२(न+१)^२}{४} = (\text{संकलित})^२.$

या सूत्राची सिद्धि गणितीय उद्‌गमन पद्धतीनें पुढीलप्रमाणें,

(१) समजा, वर्गैक्य सूत्र न = म पदांसाठीं सत्य आहे.

$$\text{तर } १^२+२^२+\ldots\ldots+म^२ = \frac{म\ (म+१)\ (२म+१)}{६}$$

यांत उजव्या बाजूस म बद्दल म+१ लिहिल्यास बेरीज म+१ पदांची होईल व ती $\frac{(म+१)\ (म+२)\ (२म+३)}{६}$ इतकी होईल. तसेंच डाव्या बाजूस म+१ पदे लिहिल्यास बेरीज $१^२+२^२+३^२+\ldots+म^२+\ (म+१)^२$ इतकी होईल, म्हणजेच $\frac{म\ (म+१)\ (२म+१)}{६} +\ (म+१)^२$ होईल.

$$\text{सोडवून बेरीज} = \frac{(म+१)}{६}\left\{ २म^२+म+६म+६\right\} = \frac{(म+१)\ (म+२)\ (२म+३)}{६}.$$

वर्गैक्याचे सूत्र जर न = म या किंमतीस सत्य असेल तर न = म + १ यासाठींही तें सत्य आहे.

पण $१^२+२^२+३^२=१४$. आणि सूत्रानें $\frac{३\times४\times७}{६} = १४$.

म्हणून न = ३ लाही सूत्र सत्य आहे.

∴ न = ४, ५, ६ वगैरे सर्व पूर्णांकी किंमतींसाठीं सत्य आहे.

(२) समजा घनैक्य सूत्र न = म या किंमतीसाठीं सत्य आहे, तर

$$१^३+२^३+३^३+\ldots\ldots\ldots\ldots+म^३ = \frac{म^२\ (म+१)^२}{४}.$$

आतां उजव्या बाजूस म बद्दल म+१ घातल्यास, म्हणजे पदसंख्या म+१ केल्यास, बेरीज $\frac{(म+१)^२\ (म+२)^२}{४}$.

$$\text{डावे बाजूस बेरीज} = १^३+२^३+३^३+\ldots\ldots\ldots\ldots+म^३ + (म+१)^३$$

$$= \frac{म^२\ (म+१)^२}{४} + (म+१)^३ = \frac{(म+१)^२}{४}\left(म^२+४म+४ \right)$$

$$= \frac{(म+१)^२\ (म+२)^२}{४}.$$

म्हणून जर सूत्र न = म साठीं सत्य असेल, तर तें म + १ साठींही सत्य आहे.

आता म = ३ घेतले तर $१^३ + २^३ + ३^३ = ३६$ व सूत्राप्रमाणें $\frac{३^२ \times ४^२}{४} = ३६$.

म्हणून म = ३ यासाठीं सूत्र बरोबर आहे. वरील सिद्धान्तानें तें ४, ५, ६ वगैरे सर्व पूर्णांकी किंमतीसाठीं सत्य आहे. ही सूत्रसिद्धि झाली. वाचकांच्या लक्षांत येईल कीं 'गणितीय उद्‌गमन' पद्धति ही सोयीस्कर आहे. हल्लीं पूर्णांकांचे गुणधर्म सिद्ध करण्यास हीच पद्धत वापरण्याची प्रथा आहे.

सूत्र : गणितश्रेढीच्या कांहीं पदांची बेरीज काढण्याचें सूत्र.

श्लोक ११५

व्येकपदघ्नचयो मुखयुक्स्यादन्त्यधनम् मुखयुग्दलितं तम् ।
मध्यधनं पदसंगुणितं तत्सर्वधनं गणितं च तदुक्तम् ।। ११५ ।।

अर्थ : (पद = अंकांची संख्या, चय = गणितश्रेढीच्या कोठल्याही पदांतील व तत्पूर्व पदांतील फरक; मुख = पहिलें पद; अन्त्यधन = शेवटचें पद; मध्यधन = मधलें पद; सर्वधन = बेरीज.) पदसंख्येंतून एक उणा करून त्यास चयानें गुणून आदिधन मिळविलें म्हणजे अंत्यधन येतें. $[l = a + (n-1)d]$.

अंत्यधन व आदिधन यांच्या बेरजेस २ नें भागलें म्हणजे मध्यधन m येतें. $\left[m = \frac{a+l}{2}\right]$

मध्यधनास पदसंख्येंनें गुणलें म्हणजे सर्वधन येतें. $\left[S = \frac{n}{2}(a+l)\right]$.

नवीन बीजगणितांत मध्यधनास विशेष महत्त्व नाहीं.

स्पष्टीकरण : कोठल्याही गणितश्रेढींत आदिधन व अंत्यधन यांची बेरीज, तसेंच दुसऱ्या व शेवटून दुसऱ्या, तिसऱ्या व शेवटून तिसऱ्या वगैरे पदांची बेरीज समान असते. आणि मध्यधन असल्यास तें या बेरजेच्या अर्धे असतें. गणितश्रेढीच्या **न** पदांच्या बेरजेचें सूत्र ११३ श्लोकावरील स्पष्टीकरणांत सिद्ध केलें आहेच.

उदाहरण १

श्लोक ११६

तेषामेव च वर्गैक्यं घनैक्यं च वद द्रुतम् ।
कृतिसंकलना-मार्गे कुशला यदि ते मतिः ।। ११६ ।।

अर्थ : पूर्वीच्या उदाहरणांत जे अंक सांगितले (१ ते ९) यांचे वर्गैक्य व घनैक्य, जर तुला संकलन व वर्गैक्य सूत्र ठाऊक असेल तर, सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें वर्गैक्य $= \frac{९ \times १० \times १९}{६} = २८५$.

घनैक्य $= \left(\frac{९ \times १०}{२}\right)^२ = ४५^२ = २०२५$ हे उत्तर.

उदाहरण २

श्लोक ११७

आदिः सप्त चयः पंच गच्छोऽष्टौ यत्र तत्र मे ।
मध्यान्त्यधन-संख्ये के वद सर्वधनं च किम् ॥ ११७ ॥

अर्थ : (गणितश्रेढीचें) प्रथम पद ७, अंतर ५, पदसंख्या ८ असतील तर मध्यधन, अंत्यधन व सर्वधन सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें,

अंत्यधन = (गच्छ − १) ७ × चय + आदिधन = ७ × ५ + ७ = ४२

मध्यधन = $\left(\frac{\text{आदि} + \text{अंत्य}}{२}\right) = \frac{७+४२}{२} = \frac{४९}{२}$. येथें मध्यधन श्रेढीचें पद नाहीं.

सर्वधन = गच्छ × मध्यधन = $८ \times \frac{४९}{२}$ = १९६.

उदाहरण ३

श्लोक ११८

आद्ये दिने द्रम्मचतुष्टयं यो । दत्त्वा दिनेभ्योऽनुदिनं प्रवृत्तः ॥
दातुं सखे पंच-चयेन पक्षे । द्रम्मा वद द्राक्कति तेन दत्ताः ॥ ११८ ॥

अर्थ : एका गृहस्थानें पहिल्या दिवशीं ४ द्रम्म दान (ब्राह्मणास) दिलें. पुढें प्रत्येक दिवशीं ५ अधिक याप्रमाणें १५ दिवस तो दान देत होता. तर त्यानें एकूण किती द्रम्म दान दिलें ?

स्पष्टीकरण : येथें आदि = ४, चय = ५, गच्छ = १५.

अंत्यधन = (१५ − १) × ५ + ४ = ७४.

मध्यधन = $\frac{४+७४}{२}$ = ३९.

सर्वधन = १५ × ३९ = ५८५.

नवीन पद्धतीनें, सर्वधन = $\frac{१५}{२}\left\{८+१४\times५\right\} = \frac{१५}{२} \times ७८$ = ५८५.

सूत्र : गणित श्रेढींत प्रथमपद (आदिधन) काढणे.

श्लोक ११९

गच्छहृते गणिते वदनं स्यात् । व्येकपदघ्नचयार्धविहीने ॥ ११९ ॥

अर्थ : जर गणितश्रेढीचें प्रथम पद काढावयाचें असेल तर सर्वधनास पदसंख्येनें म्हणजे गच्छानें भागावें. त्यांतून (गच्छ – १) यास चयार्धानें गुणून येणारी संख्या वजा करावी म्हणजे आदिधन मिळतें.

स्पष्टीकरण : जर स हे सर्वधन असेल तर

$$स = \frac{न}{२}\left\{ २ अ + (न - १) च \right\}. \quad \therefore \frac{स}{न} = अ + \frac{(न-१)च}{२}$$

अर्थात $अ = \frac{स}{न} - \frac{(न-१)च}{२}$. हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १२०

पंचाधिकं शतं श्रेढीफलं सप्तपदं किल ।
चयं त्रयं वयं विद्मो वदनं वद नंदन ।। १२० ।।

अर्थ : एका गणितश्रेढींत सर्वधन १०५ आहे, गच्छ ७ आहे आणि चय ३ आहे. तर हे मुला श्रेढीचें आदिपद सांग.

सूत्राप्रमाणे $अ = \frac{स}{न} - \frac{(न-१)च}{२} = \frac{१०५}{७} - \frac{६ \times ३}{२}$

$= १५ - ९ = ६$. हें उत्तर.

सूत्र : गणितश्रेढींत चय (अंतर) काढणें.

श्लोक १२१

गच्छहृतं धनमादिविहीनम् ।
व्येकपदार्धहृतं च चयः स्यात् ।। १२१ ।।

अर्थ : सर्वधनास गच्छानें भागून त्यांतून प्रथम पद वजा द्यावें. उरलेल्यास $\left(\frac{गच्छ - १}{२}\right)$ यानें भागावें म्हणजे चय (वृद्धिसंख्या) मिळतो.

स्पष्टीकरण : पूर्वींचेंच सूत्र घेऊन

$$स = \frac{न}{२}[२ अ + (न - १)च]. \quad \therefore \frac{स}{न} - अ = \frac{(न - १) च}{२}.$$

$$\therefore \text{चय} = \text{वृद्धिसंख्या} = \frac{\frac{\text{स}}{\text{न}} - \text{अ}}{\frac{\text{न} - १}{२}}$$ या समीकरणानें सूत्र सिद्ध.

श्लोक १२२

> प्रथममगमदह्ना योजने यो जनेशः ।
> तदनु ननु कया ऽसौ ब्रूहि यातो ऽध्ववृद्धया ।।
> अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या ।
> रिपुनगरमवाप्तः सप्तरात्रेण धीमन् ।। १२२ ।।

अर्थ : शत्रूच्या हत्तींचें हरण करण्यासाठीं एक राजा पहिल्या दिवशीं २ योजनें, व नंतर प्रत्येक दिवशीं कांहीं जास्त योजनें या प्रमाणें ७ दिवसांत ८० योजनें चालून गेला, तर हे धीमन् (बुद्धिमान मुला), त्यानें दर दिवशीं किती अधिक मार्ग कापला ?

स्पष्टीकरण : या उदाहरणांत अध्ववृद्धि (जास्त केलेली चाल) हा चय आहे.
म्हणून वरील सूत्रानें

$$\text{चय} = \frac{\frac{८०}{७} - २}{\frac{७ - १}{२}} = \frac{\frac{६६}{७}}{३} = \frac{६६}{२१} = \frac{२२}{७} = ३\frac{१}{७}$$

$\therefore$ दररोज $३\frac{१}{७}$ योजनें इतका अधिक प्रवास, हें उत्तर.

सूत्र : गणितश्रेढींत गच्छ म्हणजे पदसंख्या काढण्याचें सूत्र.

श्लोक १२३

> श्रेढीफलादुत्तरलोचनघ्नात् । चयार्धवक्त्रांतरवर्गयुक्तात् ।।
> मूलं मुखोनं चयखंडयुक्तम् । चयोध्दृतं गच्छमुदाहरन्ति ।। १२३ ।।

अर्थ : (गणितश्रेढीच्या पदांची बेरीज दिली असतां व आदिपद आणि चय दिला असतां गच्छ काढणें). येथें उत्तर म्हणजे चय.

रीत : सर्वधनास चयाच्या दुपटीनें गुणावें. त्यांत $\left(\text{आदि} - \frac{\text{च}}{२}\right)$ याचा वर्ग मिळवून बेरजेचें वर्गमूळ काढावें. त्यांतून आदि वजा करून चयार्ध मिळवावा. येणाऱ्या बेरजेस चयानें भागावें म्हणजे गच्छ येतो.

स्पष्टीकरण : आपणांस वेरीज म्हणजे सर्वधन देऊन पदसंख्या काढणें आहे.

सर्वधनाचे सूत्र $स = \frac{न}{२}\left\{ २अ + (न - १) च \right\}$ असें आहे.

न अव्यक्त धरल्यास हे समीकरण द्विघाताचें आहे.

स ज्ञात असल्यास तें समीकरण $चन^{२} + न(२अ - च) - २स = ०$ असें होते.

नवीन पद्धतीनें सोडविल्यास

$$न = \frac{-(२अ - च) \pm \sqrt{(२अ - च)^{२} + ८सच}}{२च}$$

$$\therefore न = \frac{-\left(अ - \frac{च}{२}\right) \pm \sqrt{\left(अ - \frac{च}{२}\right)^{२} + २सच}}{च}$$

आतां **न** हा अधिक व पूर्णांक आहे. म्हणून वर्गमूळ अधिक धरून

$$न = \frac{\sqrt{२सच + \left(अ - \frac{च}{२}\right)^{२}} - \left(अ - \frac{च}{२}\right)}{च}$$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

गणितश्रेढींत भास्कराचार्य ऋणचय संमत मानीत नाहीं. त्याचप्रमाणें गच्छ अधिकच असला पाहिजे, कारण प्रथमपदापूर्वी श्रेढींत पदें असत नाहींत.

उदाहरण

श्लोक १२४

द्रम्मत्रयं यः प्रथमेऽह्नि दत्त्वा । दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन ॥
शतत्रयं षष्ट्यधिकं द्विजेभ्यो । दत्तं कियद्भिर्दिवसैर्वदाऽऽशु ॥ १२४ ॥

अर्थ : पहिल्या दिवशीं तीन द्रम्म देऊन पुढें दर दिवशीं २ द्रम्म अधिक असें दान एका दात्यानें ब्राह्मणांस दिलें. तर एकूण दान ३६० द्रम्म झाल्यास तो दाता किती दिवस दान देत होता.

स्पष्टीकरण : वर दिलेल्या सूत्राप्रमाणें, $२सच = २ \times २ \times ३६० = १४४०$.

$\left(अ - \frac{च}{२}\right) = ३ - \frac{२}{२} = २$. अर्थात् $\left(अ - \frac{च}{२}\right)^{२} = ४$.

$$\therefore \sqrt{२सच + \left\{अ - \frac{च}{२}\right\}^{२}} = \sqrt{१४४४} = ३८.$$

$न = \frac{३८-२}{२} = \frac{३६}{२} = १८$. हें उत्तर.

सूत्र : भूमितिश्रेढींत सर्वधन काढण्याचें सूत्र.

श्लोक १२५

> **विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समेऽर्धिते वर्गः ।**
> **गच्छक्षयांतमंत्यात् व्यस्तं गुणवर्गजं लं यत्तत् ॥**
> **व्येकं व्येकगुणोद्धृतमादिगुणं स्यात् गुणोत्तरे गणितम् ॥१२५॥**

या ठिकाणीं भास्कराचार्यांनीं प्रथम गुणोत्तराचा 'न' घात (गच्छाइतका) कसा करावा याचें सूत्र सांगितलें आहे. [पारिभाषिक शब्दांचे अर्थ : गच्छ = पदसंख्या, गुणोत्तर = पट (common ratio), गुणक = (भास्करीय अर्थानें) विषम गच्छ – १, हा सम असतो. वर्ग = (भास्करीय अर्थानें) सम गच्छाचा अर्धा.]

अर्थ : जर गच्छ विषम असेल तर त्यांतून १ वजा करून येणाऱ्या संख्येस गुणक संज्ञा द्यावी. गच्छ सम असल्यास त्याचा अर्ध करून त्यास वर्ग असें नांव द्यावें. अशा प्रकारें गच्छ शून्य होईपर्यंत सम-विषम प्रकार करावा. नंतर ० समोर गुणोत्तर ठेवून त्याचे विरुद्ध क्रमानें पट किंवा वर्ग करीत जावें. शेवटीं गुणोत्तराचा जो घात येईल तें गुणवर्गज फल समजावें. या गुणवर्गज फलांतून १ वजा करून त्याला (गुणोत्तर – १) या संख्येनें भागावें व आदिधनानें गुणावें म्हणजे श्रेढिफल येतें.

स्पष्टीकरण : समजा भूमितिश्रेढीचें गुणोत्तर २ व गच्छ ३१ आहे. तर प्रथम ३१ पासून सुरू करून गच्छ, पुढीलप्रमाणें, शून्यापर्यंत उतरत जाईल.

३१	३०	१५	१४	७	६	३	२	१	०
सं.	गु	व	गु	व	गु	व	गु	व	गु

ही ओळ तयार झाली म्हणजे वर्ग, गुणक उलट क्रमानें लिहून त्यापुढें गुणोत्तराच्या पटी किंवा वर्ग, असेल त्याप्रमाणें, लिहावें. म्हणजे पुढीलप्रमाणें संख्या मिळतात.

		घातांक
३० गु	गु...२१४७४८३६४८	३१
१५ व	व...१०७३७४१८२४	३०
१४ गु	गु... ... ३२७६८	१५
७ व	व... ... १६३८४	१४
६ गु	गु... ... १२८	७
३ व	वर्ग ... ६४	६
२ गु	गुणक ८	३
१ व	वर्ग ४	२
० गु	गुणक २	१

येथें २ गुणोत्तराचे घात झटपट करण्यासाठीं भास्कराचार्यांनें पट वर्ग यांची जोडरीत दिली आहे. तथापि प्रत्यक्ष गुणन सोपें होण्याचा संभव आहे. कारण वर्गक्रिया मोठ्या संख्येंत कदाचित् अवघड होईल.

यापुढें सूत्राची व्युत्पत्ति देऊं :

जर आदिधन अ, गुणोत्तर र, गच्छ **न** असेल तर अंत्यधन $अ \times र^{न-१}$ इतकें होईल.

समजा एकूण बेरीज **स** असेल तर,

$$स = अ + अर + अर^{२} + अर^{३} + \dots\dots\dots + अर^{न-१}.$$

र नें गुणल्यास,

$$स\,र = अर + अर^{२} + अर^{३} + \qquad + अर^{न-१} + अर^{न}.$$

दोहोंची वजाबाकी करून, $सर - स = अर^{न} - अ.$ (मधली सर्व पदें नष्ट होतात.)

$$\therefore स\,(र-१) = अ\,(र^{न} - १) \;\therefore स = \frac{अ\,(र^{न} - १)}{र - १}$$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण १

श्लोक १२६

> **पूर्वं वराटकयुगं येन द्विगुणोत्तरं प्रतिज्ञातम् ।**
> **प्रत्यहमर्थिजनाय स मासे निष्कान ददाति कति ॥१२६॥**

अर्थ :— एका गृहस्थानें पहिल्या दिवशीं याचकांना २ कवड्या दान दिल्या, व पुढें प्रत्येक दिवशीं अगोदरच्या दानाच्या दुप्पट दान दिलें. तर एक महिन्यांत त्याने किती निष्क दान दिलें ?

स्पष्टीकरण:—येथें आदिधन **अ** = २, गुणोत्तर **र** = २, गच्छ **न** = ३० आहे.

$$\therefore \text{ सर्वधन} = \frac{अ\,(र^{न} - १)}{र - १} = \frac{२\,(२^{३०} - १)}{२ - १}$$

पण मागच्या (पृ. ८५) स्पष्टीकरण कोष्टकानुसार, $२^{३०} = १०७३७४१८२४$

$$\therefore स = \frac{२ \times (१०७३७४१८२४ - १)}{२ - १} = २१४७४८३६४६ \text{ कवड्या.}$$

= १०४८५७ निष्क, ९ द्रम्म, ९ पण, २ काकिणी ६ वराटक, हें उत्तर.
(द्रव्य-कोष्टकासाठी श्लोक २ पहा)

उदाहरण २

श्लोक १२७

आदिर्द्वयं सखे वृद्धिः प्रत्यहं त्रिगुणोत्तरा ।
गच्छ सप्तदिनं यत्र गणितं तत्र किं वद ।।१२७।।

अर्थ : आदिधन २ असून गुणोत्तर ३ व गच्छ ७ असल्यास, हे मित्रा, सर्वधन किती तें सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें,

$$\text{सर्वधन} = \frac{२\,(३^{७} - १)}{३ - १} = \frac{२\,(२१८७ - १)}{३ - १} = २१८६ \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्र : लघु गुरु संयोगानें छंदांचे प्रकार काढणें.

श्लोक १२८

पादाक्षरमितगच्छे गुणवर्गफलं चये द्विगुणे ।
समवृत्तानां संख्या तद्वर्गो वर्गवर्गश्च ।।
स्वस्वपदोनौ स्यातां अर्धसमानां च विषमाणाम् ।।।१२८।।

अर्थ : [प्रत्येक वृत्तांत सामान्यतः ४ चरण असतात. हृया चाऱ्ही चरणांत लघुगुरुक्रम एकच प्रकारचा असेल तर अशा वृत्तांस समवृत्त म्हणतात.] अशा समवृत्तांचे प्रस्तारभेद म्हणजे प्रकार मोजावयाचे असतील तर खालील सूत्र लागतें.

वृत्ताच्या चरणांत जितकी अक्षरें असतील तितका गच्छ समजून व गुणोत्तर २ समजून (लघु किंवा गुरु पर्याय म्हणून) त्याचा गच्छाइतका घात केल्यास प्रस्तार-संख्या मिळते. ज्या वृत्तांत ४ चरण असतात व पहिला व तिसरा चरण समान प्रस्तार-प्रकाराचे व दुसरा व चौथा समान प्रस्तार प्रकाराचे असतात त्याला अर्धसमवृत्तें म्हणतात. ही प्रस्तार-संख्या पुढील सूत्रानें मिळते. (येथें सर्व चरणांत सारखी अक्षर-संख्या आहे.) समवृत्तांत तेवढींच अक्षरें असतांना जितके प्रस्तारभेद होतात त्याचा वर्ग करून त्यांतून ती प्रस्तार-भेद-संख्या वजा करावी. बाकी अर्धसमवृत्त संख्या होईल.

ज्या वृत्तांच्या चाऱ्ही चरणांत अक्षरसंख्या सारखी पण लघुगुरु प्रस्तार निरनिराळे त्यांना विषमवृत्तें म्हणतात. विषमवृत्तांची संख्या काढण्यासाठीं समवृत्त प्रस्तारभेद-संख्येचा चतुर्घात करावा व त्यांतून त्याच संख्येचा वर्ग वजा द्यावा; म्हणजे विषम-वृत्त संख्य मिळते.

स्पष्टीकरण : समजा प्रत्येक चरणांत **न** अक्षरें आहेत. चरण बांधतांना प्रत्येक अक्षरास लघु किंवा गुरु हेच दोन पर्याय आहेत. म्हणून **न** अक्षरांत प्रत्येक अक्षराची २ प्रकारची निवड असेल तर प्रस्तार-सिद्धांताच्या मूळ नियमाप्रमाणें (मूळ नियम = fundamental theorem)

२×२×२×... न वेळां, इतके भेद होतील.

चारही ओळी सारख्याच. म्हणून प्रस्तार-भेद $२^{न}$. अर्ध-समवृत्तांत पहिली ओळ व तिसरी ओळ समान तर दुसरी व चौथी समान. म्हणून पहिल्या ओळीचे प्रस्तार-भेद $२^{न}$ आणि दुसऱ्या ओळीचे प्रस्तार-भेद $२^{न}$. अर्थात पहिल्या दोन ओळींचे प्रस्तार-भेद $२^{न} \times २^{न}$
$= (२^{न})^{२} = २^{२न}$.

तिसरी व चौथी ओळ पहिलीशी व दुसरीशी समान. यांतून समवृत्तें बाद केलीं म्हणजे अर्धसमवृत्तांची संख्या $(२^{न})^{२} - २^{न}$ इतकी होते.
विषम-वृत्त संख्या काढतांना प्रत्येक ओळीचा प्रस्तार-भेद निराळा.

म्हणून मूल सिद्धांताप्रमाणें, विषमवृत्तें $२^{न} \times २^{न} \times २^{न} \times २^{न}$ इतकी होतात. यांत अर्धसम आणि समवृत्तें पण आहेत. त्यांची संख्या बाद करून विषमवृत्त-प्रस्तारांची संख्या, येथे वर्गवर्ग=चतुर्घात ह्यानियमानुसार,

$(२^{न})^{४} - २^{न} - [(२^{न})^{२} - २^{न}] = (२^{न})^{४} - (२^{न})^{२}$. हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १२९

समानामर्धतुल्यानां विषमाणां पृथक् पृथक् ॥
वृत्तानां वद मे संख्यामनुष्टुप्छंदसि द्रुतम् ॥१२९॥

अर्थ : अनुष्टुप् छंदांत (हा अष्टाक्षरी असतो) सम, अर्धसम आणि विषम छंदांचे प्रस्तार-भेद किती.

समवृत्तें = $२^{८}$ = २५६.

अर्धसमवृत्ते = $(२^{८})^{२} - २^{८} = २५६^{२} - २५६ = ६५२८०$.

विषमवृत्तें = $(२^{८})^{४} - (२^{८})^{२}$ = ४२९४९६७२९६ − ६५५३६
= ४२३४९०१७६० भेद हें उत्तर.

प्रथमखंड समाप्त

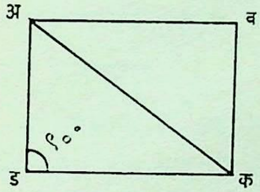
प्रकरण २७

क्षेत्रव्यवहार (क्षेत्रमापन)

श्लोक १३०

इष्टो बाहुर्यःस्यात् तत्स्पर्धिन्यां दिशीतरो बाहुः ।
त्र्यस्रे चतुरस्रे वा सा कोटिः कीर्तिता तज्ज्ञैः ॥१३०॥

अर्थ : (काटकोन त्रिकोणांत) एकमेकांस लंब असणाऱ्या दोन बाजूंपैकीं एकीस भुज किंवा बाहु म्हणतात. तिला लंब असणाऱ्या दिशेनें जाणाऱ्या (स्पर्धिन्यां दिशि) बाहूस कोटि म्हणतात. ही व्याख्या चौकोनासही लागू पडते.



आकृती ३

स्पष्टीकरण : शेजारच्या आकृतींत **अ ड क** हा काटकोन त्रिकोण आहे. यांत **अ ड** भुज मानल्यास **ड क** ही कोटि (**अ क** यास कर्ण म्हणतात.) तसेंच **अ ब क ड** या आयतांत (चतुरस्र) **अड** भुज आणि **डक** कोटि.

श्लोक १३१

तत्कृत्योर्योगपदं कर्णो दोः कर्णवर्गयोर्विवरात् ।
मूलं कोटिः कोटिश्रुतिकृत्योरंतरात्पदं बाहुः ॥१३१॥

अर्थ : [येथें शब्दांचे अर्थ पुढीलप्रमाणें :–कृति = वर्ग; योग = बेरीज; पदं = वर्गमूळ; विवर = फरक; श्रुति = कर्ण; दोः = बाहु; भुज]
काटकोन त्रिकोणांत कोटि व भुज यांच्या वर्गांच्या बेरजेचें वर्गमूळ हा कर्ण. कर्णवर्गांतून भुजवर्ग वजा देऊन उरलेल्याचें वर्गमूळ हें कोटि. कर्णवर्गांतून कोटिवर्ग वजा देऊन उरलेल्याचें वर्गमूळ हा भुज.

स्पष्टीकरण : वरील श्लोकांत काटकोन त्रिकोणाच्या कर्ण व इतर बाजूसंबंधींचा पायथ्यागोरसचा सिद्धांत सांगितलेला आहे. हा सिद्धांत शुल्वसूत्रकारांपासून (इ. स. पू. ८०० वर्षें) भारतीयांस ठाऊक होता. पायथ्यागोरसनें तो इ. स. पूर्वी ५६० वर्षे या काळीं प्रसिद्ध केला. भास्करीय पद्धतींत सिद्धांताची उपपत्ति देण्याची प्रथा नाहीं. या प्रमेयाची सिद्धता क्रमिक पुस्तकांत दिलेली असते. आम्ही फक्त सिद्धांताचे स्वरूप पुढें देतों.

आकृति ३ मध्यें,

(१) $अक^2 = अड^2 + बड^2$.
(२) $कड^2 = अक^2 - अड^2$.
(३) $अड^2 = अक^2 - कड^2$.

वास्तविक हे तीन स्वतंत्र नियम नसून एकाच नियमाची केवळ तीन स्वरूपें आहेत.

म्हणून (१) कर्ण = $\sqrt{\text{भुज}^2+\text{कोटी}^2}$

(२) भुज = $\sqrt{\text{कर्ण}^2-\text{कोटि}^2}$

(३) कोटि = $\sqrt{\text{कर्ण}^2-\text{भुज}^2}$

श्लोक १३२

राश्योरंतरवर्गेण द्विघ्ने घाते युते तयोः ।
वर्गयोगी भवेदेवं तयोर्योगांतरा हतिः ॥
वर्गांतरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता ॥१३२॥

अर्थ : दोन राशींमधल्या फरकाचा वर्ग करून त्यांत त्या दोन राशींच्या गुणाकाराची दुप्पट मिळविल्यास राशींच्या वर्गांची बेरीज येते. तसेंच राशींच्या बेरजेस त्यांच्या अंतरानें गुणल्यास त्यांच्या वर्गांतलें अंतर मिळतें.

स्पष्टीकरण : वरील सूत्रें बैजिक पद्धतीनें मांडल्यास

$\text{अ}^2 + \text{ब}^2 = (\text{अ} - \text{ब})^2 + 2\text{अ}\,\text{ब}$. तसेंच

$\text{अ}^2 - \text{ब}^2 = (\text{अ} + \text{ब})\,(\text{अ} - \text{ब})$.

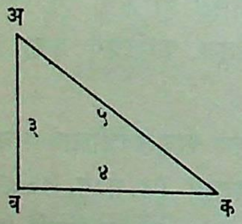
उदाहरण १

श्लोक १३३

कोटिश्चतुष्टयं यत्र दोस्त्रयं तत्र का श्रुतिः ।
कोटिं दोष्कर्णतः कोटिश्रुतिभ्यां च भुजं वद ॥१३३॥

अर्थ : कोटि ४ व भुज ३ असतां कर्ण किती ? तसेंच कर्ण व भुज अनुक्रमे ५ व ३ दिल्यास कोटि काय ? तसेंच कर्ण व कोटि ५ व ४ दिल्यास भुज काय ?

स्पष्टीकरण :



आकृती ४

$\text{कर्ण}^2 = \text{भुज}^2 + \text{कोटि}^2 = ३^2 + ४^2 = २५$.

$\therefore$ कर्ण = ५.

तसेंच, $\text{कोटि}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{भुज}^2 = २५ - ९ = १६$,

$\therefore$ कोटि = ४.

तसेंच, $\text{भुज}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2 = २ - १६ = ९$.

$\therefore$ भुज = ३.

उदाहरण २

श्लोक १३४

सांघ्रित्रयमितो बाहुर्यत्र कोटिश्च तावती ।
तत्र कर्णप्रमाणं किं गणक ब्रूहि मे द्रुतम् ॥१३४॥

अर्थ : ज्या काटकोन त्रिकोणांत बाहु $३\frac{१}{४}$ व कोटि $३\frac{१}{४}$ आहेत त्या त्रिकोणांतल्या कर्णाचें मान किती तें, हे गणका, मला सत्वर सांग. (अंघ्रि $= \frac{१}{४}$)

स्पष्टीकरण : कर्णवर्ग नियमानें, $\text{कर्ण}^२ = \text{बाहु}^२ + \text{कोटि}^२ = \frac{१६९}{१६} + \frac{१६९}{१६} = \frac{१६९}{८}$.

$\therefore$ कर्ण $= \frac{१३}{२\sqrt{२}}$. नवीन पद्धतीप्रमाणें, अंश छेदांस $\sqrt{२}$ नें गुणून,

कर्ण $= \frac{१३\sqrt{२}}{४}$ हें उत्तर.

अर्थ : (वरील श्लोकांत वर्गमूलचिन्हांतर्गत संख्येचें (जी संख्या पूर्ण वर्ग नाहीं तिचें) वर्गमूळ आसन्न म्हणजे जवळ जवळ बरोबर काढण्याची रीत दिली आहे.) यालाच करणीगत मूळ म्हणतात.

करणीचिन्हांत असलेल्या अपूर्णांकाच्या अंश व छेदांचा गुणाकार करून त्यास पूर्ण वर्ग असलेल्या कोठल्यातरी मोठ्या संख्येनें गुणावें. या गुणाकाराच्या वर्गमूळास छेदांकानें व इष्ट संख्येच्या वर्गमूळानें भागावें म्हणजे पदाचें (वर्गमूळाचें) आसन्न मूल्य येईल.

स्पष्टीकरण : समजा $\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}}$ याची किंमत काढण्याची आहे. तर **इ** इष्ट धरून

सूत्राप्रमाणें ती किंमत $\frac{\sqrt{\text{अ} \times \text{ब} \times \text{इ}}}{\text{ब} \times \sqrt{\text{इ}}}$ इतकी झाली.

म्हणजेच वर्गमूळ $= \sqrt{\frac{\text{अ}\times\text{ब}\times\text{इ}}{\text{ब}\times\text{ब}\times\text{इ}}} = \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}}$.

आतां वर्गमूळ काढतांना मोठ्या संख्येचें वर्गमूळ मोठें असल्यानें व छेदांत संपूर्ण वर्ग आल्यानें, जो अपूर्णांक वर्गमूळ दाखवील तो तें खऱ्या किंमतीच्या जास्त जवळची किंमत दाखवील.

उदाहरण २ मध्यें, $\sqrt{\frac{१६९}{८}} = \frac{१३ \times \sqrt{२}}{४} = \frac{१३ \times १\cdot४१४}{४} = \frac{१३ \times १४१\cdot४}{४००}$

$$= \frac{१८३८२}{४००} = \frac{३६७६४}{८००} = \left\{४\frac{४७६}{८००} + \frac{१}{२००}\right\} \text{ आसन्न.}$$

भास्कराचार्यांच्या रीतीनें १०००० इष्टांक धरून

वर्गमूळ $= \frac{\sqrt{१६९ \times ८ \times १००००}}{८००} = \frac{३६७७}{८००} = ४\frac{४७७}{८००}$.

म्हणून जें वर्गमूळ आलें तें सविशेष म्हणजे थोडचा फरकानें आलें.

$\sqrt{२}$, $\sqrt{५}$, $\sqrt{१७}$ वगैरे संख्या अगुणोत्तरीय (irrational) असतात याची जाणीव भास्करार्यास होती व त्यांची आसन्नमूल्येंच तो घेत असे.

भास्करीय काळीं दशांश अपूर्णांक नव्हते. त्यांचा उगम इटली देशांत १६ व्या शतकांत झाला. त्या अगोदर सर्व गणित व्यवहारी अपूर्णांकांत करावें लागे. भास्कराचार्यांची रीत ही एक प्रकारचें गुणोत्तरीकरण (rationalisation) आहे.

सूत्र : काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू पूर्णांकी असतां अशा त्रिकोणास जात्य त्रिकोण म्हणतात. (त्र्यस्र = त्रिकोण). अशा त्रिकोणाचा भुज दिल्यास कोटि व कर्ण काढणें.

श्लोक १३६

इष्टो भुजो ऽस्माद्द्विगुणेननिघ्नात् । इष्टस्य कृत्यैकवियुक्तयाप्तम् ॥
कोटिः पृथक् सेष्टगुणा भुजोना । कर्णो भवेत् त्र्यस्रमिदं तु जात्यम् ॥१३६॥

श्लोक १३७

इष्टो भुजस्तत्कृतिरिष्टभक्ता । द्विः स्थापितेष्टोनयुता ऽधिता वा ॥
तौ कोटिकर्णौ इति कोटितो वा । बाहुश्रुती चाकरणीगते स्तः ॥१३७॥

अर्थ : जो भुज दिला असेल त्यास कोणतीही एक इष्ट संख्या घेऊन तिच्या दुपटीनें गुणावें व गुणाकारास इष्ट वर्गांतून १ वजा करून येणाऱ्या संख्येनें भागावें. ही त्रिकोणाची कोटि होईल. नंतर कोटि व भुज यांच्या गुणाकारांतून भुज वजा करावा म्हणजे कर्ण येईल. किंवा भुजाचा वर्ग करून त्यास इष्ट संख्येनें भागावें. त्यांत इष्ट संख्या मिळवून बेरजेचें अर्ध केल्यास कर्ण येतो, व त्यांत इष्ट वजा करून उरलेल्याचें अर्ध केल्यास कोटि येते.

स्पष्टीकरण : रीत १ : समजा **क्ष** हा दिलेला भुज आहे व **य** हें इष्ट आहे. तर

$$\text{कोटि} = \frac{२\text{क्षय}}{\text{य}^२ - १}. \text{ आणि कर्ण} = \frac{२\text{क्षय}}{\text{य}^२ - १} \times \text{य} - \text{क्ष} = \frac{\text{क्ष}(\text{य}^२ + १)}{\text{य}^२ - १}.$$

$$\text{अर्थात्, कर्ण}^२ = \frac{\text{क्ष}^२ (\text{य}^४ + २\text{य}^२ + १)}{(\text{य}^४ - २\text{य}^२ + १)}, \text{ आणि}$$

$$\text{भुज}^२ + \text{कोटि}^२ = \text{क्ष}^२ + \frac{४\text{क्ष}^२\text{य}^२}{\text{य}^४ - २\text{य}^२ + १} = \frac{\text{क्ष}^२\text{य}^४ - २\text{य}^२\text{क्ष}^२ + ४\text{य}^२\text{क्ष}^२ + \text{क्ष}^२}{\text{य}^४ - २\text{य}^२ + १}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^२ (\text{य}^४ + २\text{य}^२ + १)}{\text{य}^४ - २^२\text{य} + १}.$$ म्हणून कर्णवर्गसिद्धांत सिद्ध.

रीत २ : समजा भुज **क्ष** व इष्ट **य** आहे.

$$\text{तर कर्ण} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}} + \text{य}\right) \text{ आणि कोटि} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}} - \text{य}\right)$$

$$\text{अर्थात्, कर्ण}^2 = \frac{1}{4}\frac{(\text{क्ष}^2+\text{य}^2)^2}{\text{य}^2} = \frac{\text{क्ष}^4+2\text{क्ष}^2\text{य}^2+\text{य}^4}{4\text{य}^2}$$

$$\text{भुज}^2+\text{कोटि}^2 = \text{क्ष}^2+\frac{1}{4}\frac{(\text{क्ष}^2-\text{य}^2)^2}{\text{य}^2} = \frac{4\,\text{क्ष}^2\text{य}^2+\text{क्ष}^4-2\,\text{क्ष}^2\text{य}^2+\text{य}^4}{4\,\text{य}^2}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^4+2\text{क्ष}^2\text{य}^2+\text{य}^4}{4\,\text{य}^2} = \text{कर्ण}^2.$$

येथें कर्णवर्गसिद्धांत लागू पडला व सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १३८

भुजे द्वादशके यौ यौ कोटिकर्णौ अनेकधा ।
प्रकाराभ्यां वद क्षिप्रं तौ तावकरणीगतौ ॥१३८॥

अर्थ : काटकोन त्रिकोणाचा भुज १२ असल्यास कोटि व कर्ण दोन्ही रीतींनीं सांग. मात्र ते पूर्णांक पाहिजेत.

रीत १ : समजा **य**=२. येथें हें लक्षांत ठेवलें पाहिजे कीं २**क्षय** यास $\text{य}^2 - 1$ यानें पूर्ण भाग गेला पाहिजे. तर कोटि $= \frac{2\times 12\times 2}{4-1} = 16$.

आणि कर्ण $= \frac{12(4+1)}{3} = 20$. अर्थात् $12^2+16^2=20^2$.

रीत २ : भुज १२ आहे. समजा **य**=६, तर कर्ण $= \frac{1}{2}\left\{\frac{144}{6}+6\right\} = \frac{1}{2}\times 30 = 15$

आणि कोटि $= \frac{1}{2}\left\{\frac{144}{6}-6\right\} = \frac{1}{2}\times 18 = 9$.

येथेंही **य** असा घ्यावा कीं त्यानें क्ष^2 यास भाग जाईल आणि $\frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}} + \text{य}$ हे सम पूर्णांक होतील. अर्थात् $12^2+9^2=15^2$ हें उत्तर.

तसेंच **य**=२ घेतल्यास कर्ण $= \frac{1}{2}\left(\frac{144}{2}+2\right) = \frac{1}{2}\times 74 = 37$.

आणि कोटि $= \frac{१}{२}\left(\frac{१४४}{२} - २\right) = \frac{१}{२} \times ७० = ३५.$

अर्थात् $३७^२ = ३५^२ + १२^२$ हें युक्तच आहे.

याप्रमाणें **य** संबंधींचे नियम संभाळून अनेक उत्तरें संभवतात.

उदाहरणार्थ : पहिल्या रीतींत भुज १२ असल्यास, **य=५** धरून

$$\text{कोटि} = \frac{२\times१२\times५}{५^२-१} = ५. \quad \text{कर्ण} = \frac{२\times१२\times२५}{२५-१} - १२ = १३.$$

म्हणून १२, ५, १३ ही एक जात्य तिक्कल झाली. (१) ९, १२, १५; (२) १२, १६, २०; (३) ५, १२, १३; (४) १२. ३५, ३७ अशा एकूण चार तिक्कली झाल्या. यापेक्षां अधिक उत्तरें संभवत नाहींत. पहिल्या दोन तिक्कली ३, ४, ५ या मूळ तिक्कली-पासून ३ व ४ यांनीं गुणून येतात. त्यांना दुय्यम तिक्कली म्हणतात. पण ५, १२, १३; आणि १२, ३५, ३७ या प्राथमिक तिक्कली होत.

भास्कराचार्यांच्या वेळेस प्राथमिक व दुय्यम असा फरक केलेला नसे.

सूत्र : काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण दिल्यास भुज व कोटि काढणें.

श्लोक १३९

इष्टेन निघ्नाद्द्विगुणाच्च कर्णात् । इष्टस्य कृत्येकयुजा यदाप्तं ॥
कोटिर्भवेत्सा पृथगिष्टनिघ्नी । तत्कर्णयोरन्तरमत्र बाहुः ॥१३९॥

अर्थ : कर्ण दिल्यास, इष्टसंख्या घेऊन तिच्या दुपटीनें कर्णास गुणावें व इष्ट संख्येचा वर्ग अधिक १ यानें गुणाकारास भागावें, म्हणजे कोटि मिळतो. कोटीस इष्टानें गुणून जी संख्या येईल ती कर्णांतून वजा केल्यास भुज मिळतो.

स्पष्टीकरण : समजा **क्ष** हा कर्ण आहे व **य** हें इष्टसंख्या आहे.

$$\text{तर कोटि} = \frac{२\text{यक्ष}}{\text{य}^२+१}. \quad \text{भुज} = \text{क्ष} - \frac{२\text{क्षय}^२}{\text{य}^२+१} = \frac{\text{क्ष}-\text{क्षय}^२}{\text{य}^२+१}$$

येथें कर्णवर्ग-सिद्धान्त लागू पडतो. कारण

$$\text{भुज}^२ + \text{कोटि}^२ = \frac{४\text{य}^२\text{क्ष}^२}{(\text{य}^२+१)^२} + \frac{\text{क्ष}^२(१-\text{य}^२)^२}{(\text{य}^२+१)^२}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^२}{(\text{य}^२+१)^२}\left\{४\text{य}^२ + \text{य}^४ - २\text{य}^२ + १\right\}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^२ \times (\text{य}^२+१)^२}{(\text{य}^२+१)^२} = \text{क्ष}^२ = \text{कर्ण}^२.$$

उदाहरण

श्लोक १४०

> **पंचाशीतिमिते कर्णे यौ यावकरणीगतौ ।**
> **स्यातां कोटिभुजौ तौ तौ वद कोविद सत्वरम् ॥१४०॥**

अर्थ : जर काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ८५ असेल, तर कोटि व भुज काय तें सत्वर सांग. मात्र ते पूर्णांक असावेत.

स्पष्टीकरण : नियमाप्रमाणें कोटि $= \frac{२क्षय}{य^२ + १}$. आणि समजा **य** = २ घेतले, तर

$$कोटि = \frac{२ \times ८५ \times २}{५} = ६८, \text{ आणि भुज } = \frac{क्ष\ (य^२ - १)}{य^२ + १} = \frac{८५ \times ३}{५} = ५१.$$

या ठिकाणीं कोटीची किंमत पूर्णांक यावी म्हणून २क्ष ला $य^२ + १$ याचा भाग जाणें जरूर आहे. कारण **य** ला $य^२ + १$ यानें पूर्णांक भाग जाणारच नाहीं. म्हणून $य^२ + १$ हा **क्ष** चा अवयव पाहिजे, आतां ८५ चे ५ व १७ हेच दोन अविभाज्य अवयव आहेत. ∴ **य** = २, तर $य^२ + १ = ५$. त्यानें एक उत्तर मिळालें.

जर **य** = ४ तर $य^२ + १ = १७$. म्हणून कोटि $= \frac{२ \times ८५ \times ४}{१७} = ४०$. आणि

$$भुज = \frac{८५\ (१५)}{१७} = ७५. \quad \therefore \text{ दुसरें उत्तर } ४०, ७५, ८५.$$

पूर्वी प्रमाणेंच प्राथमिक तिक्कल ८, १५, १७ यांच्या पाच पटींत ही दुय्यम तिक्कल आहे.

सूत्र : कर्ण दिला असतां, भुज आणि कोटि काढण्याची दुसरी रीत.

श्लोक १४१

> **इष्टवर्गेण सैकेन द्विगुणः कर्णोऽथवा हृतः ।**
> **फलोनः श्रवणः कोटिः फलमिष्टगुणं भुजः ॥१४१॥**

अर्थ : कर्णाच्या दुपटीस $(इष्ट^२ + १)$ यानें भागावें. यास फल म्हणावें.
तर कोटि = कर्ण − फल आणि भुज = फल × इष्ट. (श्रवण = कर्ण)

स्पष्टीकरण : समजा कर्ण **क्ष** आहे व इष्ट राशि **य** आहे.

$$तर\ कोटि = क्ष - \frac{२क्ष}{य^२ + १} = \frac{क्षय^२ + क्ष - २क्ष}{य^२ + १} = \frac{क्ष\ (य^२ - १)}{य^२ + १}$$

आणि भुज $= \frac{२क्षय}{य^{२} + १}$.

मागच्या सूत्रांत दाखविल्याप्रमाणेंच या किंमती आहेत. फक्त कोटि व भुज यांची अदला बदल झालेली आहे. आणि १४१ व्या श्लोकांतली कोटीची किंमत १४० व्या श्लोकांतल्या भुजाच्या किमतीशीं तितकीच पण विरुद्ध चिन्हाची आहे. वास्तविक पाहता हें सूत्र १४० व्या श्लोकांत दिलेल्याहून निराळें नाहीं.

सूत्र : भुज, कोटि, व कर्ण पूर्णांकी असतील असे जात्य त्र्यस्त्र (काटकोन त्रिकोण) तयार करण्याची रीत.

श्लोक १४२

> **इष्टयोराहतिर्द्विघ्नी कोटिर्वर्गान्तरं भुजः ।**
> **कृतियोगस्तयोरेवं कर्णश्चाकरणीगतः ॥१४२॥**

अर्थ : कोणत्याही दोन इष्ट संख्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट ही कोटि. त्यांच्या वर्गांतील फरक हा भुज. त्यांच्या वर्गांची बेरीज हा कर्ण.

स्पष्टीकरण : समजा **अ** आणि **ब** या दोन संख्या इष्ट संख्या घेतल्या. तर

भुज $=$ अ^{२} $-$ ब^{२} (अ $>$ ब), कोटि $=$ २अब, कर्ण $=$ अ^{२} $+$ ब^{२}.

आतां कर्णवर्गसिद्धांताप्रमाणें,

$$\text{भुज}^{२} + \text{कोटि}^{२} = (\text{अ}^{२} - \text{ब}^{२})^{२} + ४\text{अ}^{२}\text{ब}^{२} = (\text{अ}^{४} - २\text{अ}^{२}\text{ब}^{२} + \text{ब}^{२} + ४\text{अ}^{२}\text{ब}^{२})$$
$$= (\text{अ}^{४} + \text{ब}^{४} + २\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}) = (\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२})^{२} = \text{कर्ण}^{२}.$$

म्हणून सूत्र सिद्ध झालें.

हें सूत्र जात्य त्रिकोण काढण्यासाठीं किंवा काटकोन त्रिकोणाच्या अपूर्णांक बाजू काढण्यासाठींहि वापरतां येतें. अर्थात् जात्य त्र्यस्त्रांत सर्व बाजू पूर्णांक असाव्या लागतात.

उदाहरण

श्लोक १४३

> **यैर्यैस्त्र्यस्त्रं भवेज्जात्यं कोटिदोः श्रवणैः सखे ।**
> **त्रीनप्यविदितानेतान् क्षिप्रं ब्रूहि विचक्षण ॥१४३॥**

अर्थ : ज्यांच्या योगानें जात्य त्रिकोण तयार होईल असे भुज, कोटि, कर्ण अज्ञात असतां, हे मित्रा, त्यांच्या किंमती झटकन् सांग.

स्पष्टीकरण : या ठिकाणीं कोठल्याही दोन असमान पूर्णांक संख्या घ्याव्या व सूत्राप्रमाणें भुज, कोटि, कर्ण तयार करावे.

येथें समजा इष्टांक **अ**=२, **ब**–१ असल्यास

कोटि=२×२×१=४, भुज=$२^२ - १^२$=३, कर्ण=$२^२ + १^२$=५.

इष्टांक समान घेतां येत नाहींत कारण मग भुज शून्य होईल.

इष्टांक ३, २ घेतल्यास

कोटि=२×३×२=१२, भुज=$३^२ - २^२$ = ५, कर्ण $३^२ + २^२$ =१३.

याप्रमाणें अनेक जात्य त्रिकोण तयार करतां येतील.

सूत्र : जमिनीत वाढत असलेला वांबू वाऱ्याच्या सोसाटयानें मोडून कांहीं भाग कर्णवत् जमिनी-वर टेंकला तर खंडांची लांबी काढणें.

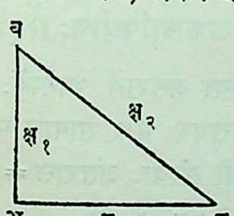
श्लोक १४४

वंशाग्रमूलांतर–भूमिवर्गो । वंशोद्धृतस्तेन पृथग्युतोनौ ।।

वंशो तदर्धे भवतः क्रमेण । वंशस्य खंडे श्रुतिकोटिरूपे ।।१४४।।

अर्थ : बांबूची उंची व तो मोडून त्याचें अग्र जमिनीवर जेथें टेकलें असेल त्या स्थानाचें बांबूच्या मूळापासून अंतर (भूमि) दिलें असतां, भूमीचा वर्ग करून त्यास वंशाच्या लांबीने भागावें. येणारें फल उंचींतून वजा करून त्याचे अर्ध घ्यावे म्हणजे भग्न बांबूच्या उभ्या भागाची उंची मिळते. तसेच फलांत बांबूची उंची मिळवून त्याचें अर्ध केल्यास तिरप्या भागाची लांबी (श्रुति) मिळते.

स्पष्टीकरण : येथें, **अब**+**बक** = **क्ष** (दिलेलें). तसेच **अक**= **य** (दिलेले).



आकृति ५

समजा **अब**=क्ष_1 , **बक**= क्ष_2

$$\text{तर } \text{क्ष}_1^2 = \text{क्ष}_2^2 - \text{य}^2 = (\text{क्ष} - \text{क्ष}_1)^2 - \text{य}^2$$

$$= \text{क्ष}^2 - २\text{क्षक्ष}_1 + \text{क्ष}_1 - \text{य}^2$$

$$\therefore\ २\text{क्षक्ष}_1 = \text{क्ष}^2 - \text{य}^2 .$$

$$\therefore\ \text{क्ष}_1 = \text{तुटक्या भागाची उंची} = \frac{१}{२}\left(\text{क्ष} - \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}}\right);$$

हें सूत्र सिद्ध झालें.

$$\text{तसेंच, } \text{क्ष}_2 = \text{क्ष} - \text{क्ष}_1 = \text{क्ष} - \frac{१}{२}\left(\text{क्ष} - \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}}\right) = \frac{१}{२}\text{क्ष} + \frac{१}{२}\,\frac{\text{य}_2}{\text{क्ष}}$$

$$= \frac{१}{२}\left(\text{क्ष} + \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}}\right).$$ हें तिरप्या भागाचें सूत्र सिद्ध झालें.

श्लोक १४५

> यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो ।
> गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ।।
> भुवि नृपमितहस्तेष्वंग लग्नं तदग्रम् ।
> कथय कतिषु मूलादेष भग्नः करेषु ।।१४५।।

अर्थ : सपाट जमिनीवर ३२ हात (द्वित्रि = ३२, अंकानां वामतो गतिः) लांबीचा एक बांबू (वेणु) उभा होता. वाऱ्याच्या वेगानें तो एके ठिकाणीं मोडला. त्याचा वरील भाग त्याच्या मूळापासून १६ हातांवर जमिनीस टेंकला. तर हे गणका, तो बांबू जमिनीपासून किती उंचीवर मोडला? (नृप = १६)

स्पष्टीकरण : येथें भूमि = १६, बांबूची लांबी ३२.

(आकृति ५ पहा), $\therefore$ $क्ष_1 = \left(३२ + \frac{१६^२}{३२}\right) \times \frac{१}{२} = \frac{३२ - ८}{२} = १२.$

तसेंच तिरपा भाग $क्ष_२ = \left(३२ + \frac{१६^२}{३२}\right) \times \frac{१}{२} = \frac{३२ + ८}{२} = २०.$

उदाहरण २

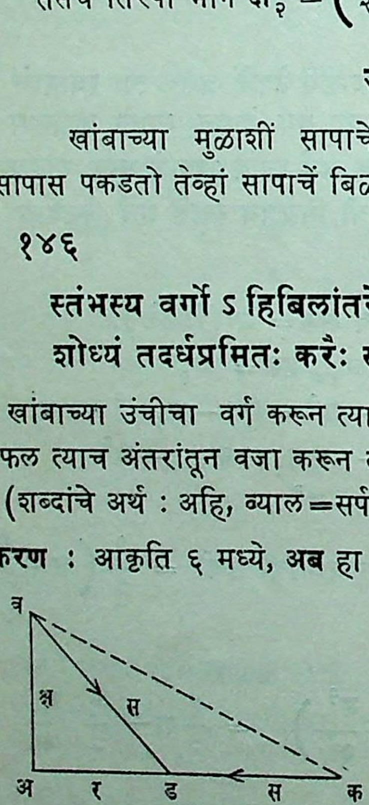
खांबाच्या मुळाशीं सापाचें बीळ असून, खांबावरून झेंप घेऊन मोर वाटेंतच सापास पकडतो तेव्हां सापाचें बिळापासून अंतर काढणें.

श्लोक १४६

> स्तंभस्य वर्गो ऽहिबिलांतरेण । भक्तः फलं व्यालबिलांतरालात् ।।
> शोध्यं तदर्धप्रमितः करैः स्यात् । बिलाग्रतो व्यालकलापियोगः ।।१४६।।

अर्थ : खांबाच्या उंचीचा वर्ग करून त्यास साप व बीळ यांमधल्या अंतरानें भागावें. येणारें फल त्याच अंतरांतून वजा करून त्याचें अर्धें घ्यावे. या अंतरावर मोर सापास पकडील. (शब्दांचे अर्थ : अहि, व्याल = सर्प. शोध्य = वजा करावयाची संख्या. अंतराल = अंतर)

स्पष्टीकरण : आकृति ६ मध्ये, **अब** हा खांब, **अक** ही भमि, व **ड** येथें मोरानें सापावर हल्ला केला असें समजू.



आकृति ६

समजा **अब** = **क्ष** (दिलेलें), **अड** = **र**, अव्यक्त **अक** = **य** (दिलेलें) तर **अड** काढणें.

या ठिकाणीं असें गृहीत धरलें आहे कीं, **बड** = **कड**. हें अंतर **स** धरू.

अर्थात् $स^२ - र^२ = क्ष^२$, आणि $स = य - र$.



क्रीडामयूराची झेंप

(संदर्भ–श्लोक १४७, पृष्ठ ९९)

$\therefore \quad (य-र)^{२} - र^{२} = क्ष^{२}$. किंवा $य^{२} - २यर = क्ष^{२}$.

$\therefore \quad र = \frac{य^{२} - क्ष}{२य} = \frac{१}{२}\left(य - \frac{क्ष^{२}}{य}\right)$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १४७

अस्ति स्तंभतले बिलं तदुपरि क्रीडाशिखंडी स्थितः
स्तंभे हस्तनवोच्छ्रिते त्रिगुणितस्तंभप्रमाणांतरे ।।
दृष्ट्वाहिं बिलमाव्रजंतमपतत् तिर्यक् स तस्योपरि ।
क्षिप्रं ब्रूहि तयोर्बिलात्कतिमितैः साम्येन गत्योर्युतिः ।।१४७।।

अर्थ : एका खांबाच्या तळाशीं सापाचें बीळ होतें व त्या खांबाच्या वरच्या टोंकावर एक पाळलेला मोर बसला होता. खांब ९ हात उंच होता व त्याच्या तिप्पट, म्हणजे बिळापासून २७ हात, अंतरावरून एक साप बिळाकडे जात असतां मोरानें पाहिला. तेव्हां त्यानें सर्पाच्याच गतीनें तिरप्या दिशेंत झेंप घालून त्याला बिळापासून कांहीं अंतरावर पकडलें. तर हें अंतर किती तें चटकन सांग.

स्पष्टीकरण : वर दिलेल्या सूत्राप्रमाणें (आकृति ६ पाहा),

$$र = \frac{१}{२}\left(य - \frac{क्ष^{२}}{य}\right) = \frac{१}{२}\left\{२७ - \frac{९^{२}}{२७}\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\ (२७ - ३) = १२$$ हें उत्तर.

अर्थात् $बड^{२} = ९^{२} + १२^{२} = १५^{२} \quad \therefore\ बड = १५, \quad कड = २७ - १२ = १५$.
म्हणजे मोर व साप यांनीं एकाच कालावकाशांत १५ हात अंतर कापलें म्हणजेच त्यांच्या गति समान होत्या.

कांहीं आधुनिक गणितज्ञ या प्रश्नावर असा आक्षेप घेतात कीं मोरानें खांबावरून उडी घेतल्यावर त्याचा हा गमनमार्ग गुरुत्वाकर्षणामुळें सरळ रेषा न होता अन्वस्ताकृति (parabolic) होईल. त्यामुळे भास्कराचार्यास संकृष्टि (gravity) ठाऊक नसावी. त्यास उत्तर हेंच कीं भास्कराचार्यास पृथ्वीचें आकर्षण जड पदार्थांवर होतें हें पुरेपूर माहीत होतें.

गोलाध्यायाच्या भुवनकोष अध्यायाच्या ६ व्या श्लोकांत तो म्हणतो,

आकृष्टशक्तिश्च मही तया यत् । खस्थं गुरुं स्वाभिमुखं स्वशक्त्या ।।
आकृष्यते तत्पततीव भाति । समे समन्तात्क्व पतत्वियं खे ।।

म्हणजे, ज्या पृथ्वीला आकर्षणशक्ति आहे ती पृथ्वी आपल्या शक्तीनें आकाशांत असलेल्या (खस्थ) जड (गुरु) वस्तूस आपणांकडे खेंचते. जें आकर्षिलें जातें तें पडतें असें वाटतें. आणि (आकाश) तर सगळीकडे सारखें आहे. मग पृथ्वी आकाशांत कोठल्या बाजूस पडेल बरें ? शिवाय मोर झेंप घालतांना झाडावरून पडणाऱ्या निर्जीव नारळा-सारखा पडत नाहीं. तो हेतुपूर्वक सापावर झेंप घालतो. तो देखील आपली गति सर्पसमान ठेवून. अशा प्रकाराची एखादी विशिष्ट अट गणितशास्त्रांतील अनेक प्रश्नांत येते. म्हणून प्रश्न चुकला असें म्हणतां येणार नाहीं. शिवाय प्रश्न काटकोन-त्रिकोणावर असल्यानें सूत्रांतील **बड** हें अंतर सरळरेषात्मक पाहिजे असे समजणेच योग्य वाटते.

सूत्र : सरोवरांत कमळ बुडालें असतां व कमळाचा जलपृष्ठावरील भाग व बुडालेल्या स्थानाचें कमलनालापासून अंतर दिलें असतां कमळाची उंची काढणें, व पाण्याची उंची काढणें.

श्लोक १४८

भुजाद्वर्गितात्कोटिकर्णान्तराप्तं । द्विधा कोटिकर्णान्तरेणोनयुक्तं ॥
तदर्धे क्रमात् कोटिकर्णौ भवेताम् । इदं धीमता वेत्य सर्वत्र योज्यम् ॥१४८॥

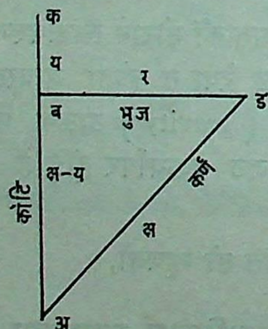
अर्थ : भुजाच्या वर्गास, कर्ण व कोटि यांच्या फरकानें भागावें. त्यांत कर्ण व कोटि यांतील फरक वजा करून त्याचें अर्ध करावें म्हणजे कोटि मिळतो व फरक मिळवून अर्ध केल्यास कर्ण मिळतो.

श्लोक १४९

सखे पद्म-तन्मज्जनस्थानमध्यम् । भुजः कोटिकर्णांतरं पद्म दृश्यम् ॥
नलः कोटिरेतन्मितं स्याद्यतोम्भो । वदैवं समानीय पानीयमानम् ॥१४९॥

अर्थ : मित्रा, प्रथम कमळाचा दांडा जलपृष्ठास जेथें छेदतो तेथून कमळ बुडालें त्या जागेचें अंतर हें भुज समजावें. तसेंच कमळाची जलपृष्ठावर असलेली उंची हें कोटि व कर्ण यांतील अंतर समजावें. पाण्यांत असलेली कमलनालाची उंची ही कोटि समजावी.

स्पष्टीकरण : सोबत आकृति ७ मध्ये कमळाची उंची **अक=अड**. कमळ बुडालें त्या ठिकाणचें अंतर=**बड.** कमळाचा दृश्य भाग = **बक.** वाऱ्याच्या झोतानें कमल **ड** पर्यंत जाऊन बुडालें तरी **अड** हा नाल किंवा देंठ सरळ राहिला हें गृहीत धरलें आहे. नाहींतरी पाण्यांत देंठ सरळ राहिला आहे कीं वाकडा झाला आहे हें कोणास दिसणार ?



आकृति ७

समजा **अड = क्ष** (अव्यक्त), **बड=र** (दिलेलें), **बक=य** (दिलेलें) आणि **अब=क्ष − य** (अव्यक्त).

$\triangle$ **अबड** यांत $क्ष^2 = र^2 + (क्ष - य)^2$

$= र^2 + क्ष^2 - 2\,क्षय + य^2 . \therefore 0 = र^2 - 2\,क्षय + य^2$



कमलकलिकाग्राची उंची

(संदर्भ—श्लोक १५०, पृष्ठ १०१)

अर्थात् २क्षय = $र^2 + य^2$ $\therefore$ $क्ष = \frac{१}{२} \frac{(र^2 + य^2)}{य}$

$\therefore$ कमळाची लांबी = $क्ष = \frac{१}{२}\left(\frac{र^2}{य} + य\right)$.

तसेंच पाण्याची उंची = $क्ष - य = \frac{१}{२}\left(\frac{र^2}{य} + य\right) - य = \frac{१}{२}\frac{र^2}{य} + \frac{य}{२} - य$

$= \frac{१}{२}\frac{र^2}{य} - \frac{१}{२}य = \frac{१}{२}\left\{\frac{र^2}{य} - य\right\}$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १५०

चक्रक्रौंचाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे ।
तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणं ॥
मंदं मंदं चलितमनिलेना ऽऽ हतं हस्तयुग्मे ।
तस्मिन्मग्नं गणक कथय क्षिप्रमंबुप्रमाणम् ॥१५०॥

अर्थ : ज्या एका सरोवरांत चक्रवाक् पक्षी व क्रौंच पक्षी (करकोंचे) पुष्कळ संख्येनें उपस्थित होते, त्यांत पाण्याच्या वर १ वीत उंच असलेलें कमळ, (१ वीत = $\frac{१}{२}$ हात = वितस्ति) मंद मंद अशा वाऱ्याच्या झुळकेनें सरकून २ हात अंतरावर जाऊन पाण्यांत बुडालें. तर, हे गणका, पाण्याची खोली किती तें झटकन सांग.

स्पष्टीकरण : श्लोक १४९ च्या आकृति ७ मध्ये, $य = \frac{१}{२}$, $र = २$.

म्हणून क्ष = देठाची लांबी $= \frac{१}{२}\left\{\frac{र^2}{य} + य\right\} = \frac{१}{२}\left\{\frac{४}{\frac{१}{२}} - \frac{१}{२}\right\}$

$= \frac{१}{२}\left\{\frac{१७}{२}\right\} = \frac{१७}{४}$ हात.

आणि पाण्याची खोली $= \frac{१}{२}\left\{\frac{४}{\frac{१}{२}} - \frac{१}{२}\right\} = \frac{१}{२}\left\{\frac{१५}{२}\right\} = \frac{१५}{४}$ हात.

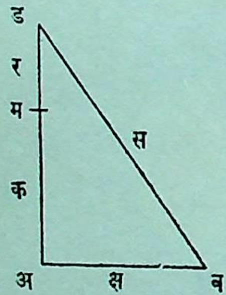
सूत्र : ताडाच्या झाडावर असलेला वानर उडया मारून विहिरीवर झेंपावला तर उडीची लांबी काढण्यासाठीं,

श्लोक १५१

द्विनिघ्नतालोच्छ्रिति संयुतं यत् । सरोऽन्तरं तेन विभाजितायाः ।।
तालोच्छ्रितेस्तालसरोन्तरघ्न्या । उड्डीयमानं खलु लभ्यते तत् ।।१५१।।

अर्थ : (द्विनिघ्न = दोहोनें गुणून; उच्छ्रित = उंची)
ताडाच्या झाडाच्या उंचीच्या दुपटींत विहिरीचें बुंध्यापासूनचें अंतर मिळवावें. या फलानें झाडाची उंची व विहिरीचें अंतर यांच्या गुणाकारास भागावें. म्हणजे उड्डाणाची लांबी येईल.

स्पष्टीकरण : समजा **अम** हा तालवृक्ष आहे व **ब** ही विहीर आहे. तर एक वानर **मअब** मार्गानें चालून (क + क्ष) अंतर काटून विहिरीवर पोंचला. दुसरा **र + स = क + क्ष** एवढें उडाला.



आकृति ८.

तर $\text{क्ष} + \text{क} = \text{र} + \text{स}$. ... ... (१)

आणि $\text{क्ष}^2 + (\text{क} + \text{र})^2 = \text{स}^2$. ... ... (२)

$\therefore \text{क्ष}^2 + \text{२कक्ष} + \text{क}^2 = \text{र}^2 + \text{स}^2 + \text{२सर}$ (३)

$\text{क्ष}^2 + \text{क}^2 + \text{२कर} + \text{र}^2 = \text{स}^2$ ... ... (४)

(३) − (४) करून $\text{२कक्ष} - \text{२कर} - \text{र}^2 = \text{र}^2 + \text{२सर}$

$\therefore \text{२कक्ष} - \text{२कर} - \text{र}^2 = \text{र}^2 + \text{२र}\,(\text{क्ष} + \text{क} - \text{र})$

$= \text{र}^2 + \text{२रक्ष} + \text{२कर} - \text{२र}^2$

$\therefore \text{२कक्ष} = \text{२रक्ष} + \text{४कर}. \quad \therefore \text{कक्ष} = \text{रक्ष} + \text{२कर}$

अर्थात $\text{र} = \dfrac{\text{कक्ष}}{\text{२क} + \text{क्ष}}$. $\therefore$ $\text{उडी} = \dfrac{\text{उंची} \times \text{अंतर}}{\text{२उंची} + \text{अंतर}}$. हें सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १५२

वृक्षाद्धस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वापीं कपिः को ऽप्यगात् ।
उत्तीर्याथ परो द्रुतं श्रुतिपथात्प्रोड्डीय किंचित् द्रुमात् ।।
जातैवं समता तयोर्यदि गतावुड्डीयमानं कियत् ।
विद्वंश्चेत्सुपरिश्रमो ऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाचक्ष्व मे ।।१५२।।

अर्थ : १०० हात उंचीचें एक ताडाचें झाड होतें, त्यापासून २०० हात अंतरावर एक वापी म्हणजे विहीर होती. झाडाच्या शेंडयावर दोन वानर बसले होते. त्यांतला एक सरळ



वानरोड्डाण

(संदर्भ–श्लोक १५२, पृष्ठ १०२)

झाडावरून उतरून विहिरीवर चालत गेला. दुसऱ्यानें एक उभी उडी घेतली व तो सरळ कर्णदिशेनें विहिरीवर झेंपावला. दोघांनीं सारखेंच अंतर (गति) कापलें असल्यास दुसऱ्या वानरानें किती उंच उडी मारली ?

स्पष्टीकरण : $\text{उडी} = \dfrac{\text{उंची} \times \text{अंतर}}{२ \times \text{उंची} + \text{अंतर}} = \dfrac{१०० \times २००}{४००} = ५०$ हात.

या ठिकाणीं कोणी म्हणतील कीं वानराचा मार्ग सरळ न राहतां अन्वस्ताकृति (parabolic) होईल. त्यास उत्तर हेंच कीं प्रश्नाच्या अटीप्रमाणें तो (श्रुतिपथात्) कर्णमार्गानेंच गेला आहे. प्रायोगिकांत तो अन्वस्त मार्गानें जाईल कदाचित्. पण या ठिकाणीं गृहीत गोष्ट हीच ग्राह्यतर मानली पाहिजे.

सूत्र : जात्य त्रिकोणांत कर्ण व भुजकोटियोग दिल्यास भुज व कोटि स्वतंत्र रीतीनें काढणें.

श्लोक १५३

कर्णस्य वर्गाद्द्विगुणाद्विशोध्यः । दोः कोटियोगः स्वगुणोऽस्य मूलम् ॥
योगो द्विधा मूलविहीनयुक्तः । स्यातां तदर्धे भुजकोटिमाने ॥१५३॥

अर्थ : कर्णवर्गाच्या दुपटींतून भुजकोटियोगवर्ग वजा करून वर्गमूळ घ्यावें. तें कोटियोगांतून वजा करून येणाऱ्या फलाचा अर्ध घ्यावा म्हणजे भुज येईल. तसेंच त्यांची बेरीज करून येणाऱ्या फलाचा अर्ध घेतल्यास कोटि होईल.

स्पष्टीकरण : समजा **अ** व **ब** भुजकोटि आहेत, **क** कर्ण आहे,

$\therefore \ क^२ = अ^२ + ब^२$ … … … (१)

तसेंच **अ+ब=स** धरूं. तर

$स^२ = (अ+ब)^२ = अ^२ + ब^२ + २अब.$ … … (२)

$\therefore २क^२ - स^२ = अ^२ + ब^२ - २अब = (अ - ब)^२$ … (३)

$\therefore$ वर्गमूळ घेऊन $अ - ब \ (अ > ब) = \sqrt{२क^२ - स^२}$ … (४)

आणि $अ + ब = स$ … … (५)

$\therefore$ (४) व (५) यांची बेरीज करून $२अ = स + \sqrt{२क^२ - स^२}$

आणि त्यांच्या वजाबाकीनें $२ब = स - \sqrt{२क^२ - स^२}$. यावरून

$अ = \dfrac{स + \sqrt{२क^२ - स^२}}{२}$ आणि $ब = \dfrac{स - \sqrt{२क^२ - स^२}}{२}$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

यांतल्या लहानास भास्कराचार्य भुज म्हणतो व मोठ्यास कोटि म्हणतो.

वरील **अ, ब** च्या किंमती द्विवर्गद्विवर्ण समीकरणानें काढतां येतील.

कारण $अ + ब = स \quad \therefore \quad अ^२ + २अब + ब^२ = स^२$

आणि $अ^२ + ब^२ = क^२ \quad \therefore \quad २अब = स^२ - क^२.$

म्हणून अ, ब हीं ज्यांची मूळें (roots) आहेत तें समीकरण

$$ट^{२} - सट + \frac{स^{२} - क^{२}}{२} = ०$$

$$\therefore\ ट = \frac{स \pm \sqrt{स - \frac{४}{२}(स^{२} - क^{२})}}{२} = \frac{१}{२}\left\{स \pm \sqrt{२क^{२} - स^{२}}\right\}$$

उदाहरण

श्लोक १५४

दश सप्ताधिकाः कर्णस्त्र्यधिका विंशतिः सखे ।
भुजकोटियुतिर्यत्र तत्र ते मे पृथक् वद ॥१५४॥

अर्थ : एका काटकोन त्रिकोणांत कर्ण १७ व भुजकोटींची बेरीज २३ आहे, तर भुज व कोटि निरनिराळे सांग.

स्पष्टीकरण :

$$भुज = \frac{१}{२}\left\{२३ - \sqrt{२ \times १७^{२} - २३^{२}}\right\} = \frac{१}{२}\left\{२३ - ७\right\} = ८;$$

$$कोटि = \frac{१}{२}\left\{२३ + \sqrt{२ \times १७^{२} - २३^{२}}\right\} = \frac{१}{२}\left\{२३ + ७\right\} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्र : याच पद्धतीनें कर्ण व भुजकोटचंतर दिल्यास

$अ - ब = स$, आणि $अ^{२} + ब^{२} = क^{२}$.

$\therefore\ अ^{२} - २अब + ब^{२}.\quad \therefore\ क^{२} - स^{२} = २अब$

$अ^{२} + २अब + ब^{२} = स^{२} + २क^{२} - २स^{२} = २क^{२} - स^{२}$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ अ + ब = \sqrt{२क^{२} - स^{२}} \\ अ - ब = स. \end{array}\right\} \text{अर्थात्,}$$

$$अ = \frac{स + \sqrt{२क^{२} - स^{२}}}{२} = \text{कोटि},\quad ब = \sqrt{\frac{२क^{२} - स^{२} - स}{२}} = \text{भुज}.$$

उदाहरण

श्लोक १५५

दोष्कोटचोरंतरं शैलाः कर्णो यत्र त्रयोदश ।
भुजकोटी पृथक्तत्र वदाऽऽशु गणकोत्तम ॥१५५॥

अर्थ : कोटि व भुज यांत अंतर ७ व कर्ण १३ असल्यास भुज व कोटि स्वतंत्रपणें सांग.

स्पष्टीकरण : वरील सूत्रानें, कोटि $= \frac{७ + \sqrt{२ \times १६९ - ४९}}{२} = \frac{७ + १७}{२} = १२.$

भुज $= \frac{१७ - ७}{२}$ $= ५.$ हें उत्तर. खानापूरकर शास्त्र्यांनीं भुजकोटियोगाचेंच सूत्र वापरल्यानें (भुज $= -५$) हें मूल्य घेऊन उत्तर ऋण आलें. आम्ही दिलेल्या सूत्रांत ही गफलत नाहीं. भास्कराचार्यास ऋण वर्गमूळ ठाऊक असले तरी जात्य त्रिकोणांत भुज ऋण नसतो हें तो सांगतो. अर्वाचीन गणितज्ञांसही हें मान्य होणारें आहे.

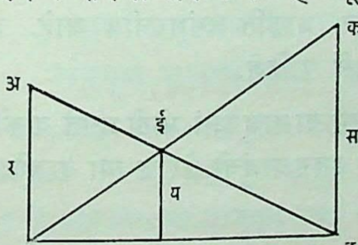
सूत्र : दोन बांबू जमिनींत रोवले. एकाच्या अग्रापासून दुसऱ्याच्या बुंध्यापर्यंत अशा २ दोऱ्या बांधल्या तर दोऱ्या छेदतात त्या बिंदूपासून जमिनीवर टाकलेल्या लंबाची उंची काढणे.

श्लोक १५६

अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगात् ।
वेण्वोर्वधे योगहृते च लंबः ।।
वंशौ स्वयोगेन हृतौ अभीष्ट- ।
भूघ्नौ च लंबोभयतः कुखंडे ।।१५६।।

अर्थ : वेळूंच्या उंच्यांचा गुणाकार करून त्यास त्यांच्या बेरजेनें भागावें म्हणजे सूत्रयोगबिंदूची उंची मिळते. तसेंच लंब आणि वेळूचा बुंधा यांतलें अंतर काढावयाचें असल्यास वेळूच्या उंचीस त्यांच्या बेरजेनें भागून वेळूंमधील अंतराने गुणावें म्हणजे भू-खंडें मिळतात.

स्पष्टीकरण : समजा **अब** व **कड** हे वेळू आहेत. यांच्या उंच्या **र**, **स** आहेत.



आकृती ९

बड = **त** समजा. **इफ** = **थ**.

तर △ **बईफ** व △ **बकड** समरूप.

तसेंच △ **ईफड**, आणि △ **अबड** समरूप.

$$\therefore \quad \frac{य}{स} = \frac{बफ}{त} \text{ आणि } \frac{य}{र} = \frac{फड}{त}.$$

$$\therefore \quad \frac{य}{स} + \frac{य}{र} = \frac{बफ + फड}{त} = \frac{त}{त} = १.$$

$$\therefore \quad य \; \frac{(स+र)}{सर} = १. \quad \text{किंवा } य = \frac{सर}{स+र}.$$

$$\text{आतां } बफ = \frac{यत}{स} = \frac{सर \times त}{स\ (स+र)} = \frac{र \times त}{स+र}.$$

तसेंच **फड** $= \frac{स \times त}{स+र}$ हें सूत्र सिद्ध झाले.

या सूत्रांची सिद्धता निबंधन भूमितीनें (coordinate geometry) लवकर होते. पण विस्तारभयास्तव येथें देतां येत नाहीं. लंब काढतांना बड अंतराची आवश्यकता नाहीं हें दिसून येईलच.

उदाहरण

श्लोक १५७

पंचदश–दशकरोच्छ्रायवेण्वोरज्ञातमध्यभूमिकयोः ।
इतरेतरमूलाग्रगसूत्रयुतेर्लंबमानमाचक्ष्व ।।१५७।।

अर्थ : २ बांबू १५ हात व १० हात उंचीचे असून त्यांमधील अंतर अज्ञात आहे. प्रत्येक वेळूच्या वरच्या टोंकापासून तों दुसऱ्याच्या मुळापर्यंत अशा दोन दोऱ्या बांधल्या. तर जेथें दोऱ्यांची युति होते त्या बिंदूची उंची काय ?

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें, लंब $= \frac{१५ \times १०}{१५ + १०} = \frac{१५०}{२५} = ६.$

सूत्र : त्रिकोणाची असंभवनीयता

श्लोक १५८

धृष्टोद्दिष्टमृजुभुजं क्षेत्रं यत्रैकबाहुतः स्वल्पा ।
तदितर–भुजयुतिरथवा तुल्या ज्ञेयं तदक्षेत्रम् ।।१५८।।

अर्थ : ज्या बहुभुजाकृतींत किंवा त्रिकोणांत एक बाजू इतर बाजूंच्या बेरजेपेक्षां मोठी असते किंवा बेरजेएवढीच असते असा त्रिकोण किंवा आकृति असंभवनीय आहे. असें क्षेत्र (आकृति) आहे असें सांगणाराचें धाडसच म्हटलें पाहिजे.

स्पष्टीकरण : यांत त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असते व कोठल्याही सरलरेषाबद्ध आकृतींत (ऋजुभुज) एक सोडून इतर बाजूंची बेरीज त्या बाजूपेक्षां मोठी असते हें सांगितलें आहे.

अर्थात् या सिद्धांताची सिद्धता दिलेली नाहीं. भारतांतल्या प्राचीन गणितज्ञांना त्याची आवश्यकता वाटली नाही हा एक दुर्विलासच होय.

उदाहरण

श्लोक १५९

चतुरस्त्रे द्विषट्त्र्यर्का भुजास्त्र्यस्त्रे त्रिषणणव ।
उद्दिष्टा यत्र धृष्टेन तदक्षेत्रं विनिर्दिशेत् ।।१५९।।

अर्थ : चौकोनाच्या ४ बाजू अनुक्रमें २, ६, ३, १२ आहेत असें, किंवा त्रिकोणाच्या ३ बाजू अनुक्रमें ३, ६, ९ आहेत असें, एखाद्या शहाण्यानें सांगितलें तर त्याला समजवावें कीं, बाबा रे, अशा आकृति होऊंच शकत नाहींत.

स्पष्टीकरण : वरील सिद्धांताची सिद्धता पुढीलप्रमाणें :– समजा **अबक** हा त्रिकोण आहे व त्यांत **बक** ही सर्वांत मोठी बाजू आहे.

साध्य : अब + अक > बक.

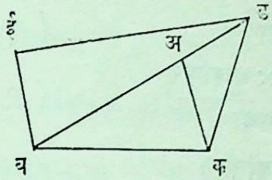
अब वाढवून **अड** =**अक** करा. **कड** जोडा.

सिद्धता : △ **अकड** मध्यें **अड**=**अक**. ∴ ∠ **अकड** = **अडक.**

पण ∠ **अकड** हा ∠ **बकड** चा भाग आहे.

∴ ∠ **बकड** > ∠**अडक**. अर्थात **बड** > **बक.**

∴ **बअ**+**अड** > **बक** म्हणजेच **अब** + **अक** > **बक** हें सिध्द.



आकृति १०

आकृति १० मधील **बकडई** चौकोनांत **बड** + **डई** > **बई**. यांत **बड** ऐवजीं त्यापेक्षां मोठी संख्या **बक** + **कड** घातल्यास **बक** + **कड** + **डई** > **बई**, हें सिद्ध.

सूत्र : त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून समोरील बाजूवर लंब टाकल्यास पायाचीं जीं खंडे होतात तीं काढण्याचें सूत्र.

श्लोक १६०

त्रिभुजे भुजयोर्योग स्तदंतरगुणो भुवा हृतो लब्ध्या ।
द्विःस्था भूरूनयुता दलिताऽऽबाधे तयोः स्याताम् ॥१६०॥

श्लोक १६१

स्वाबाधाभुजकृत्योरन्तरमूलं प्रजायते लंबः ।
लंबगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति ॥१६१ ॥

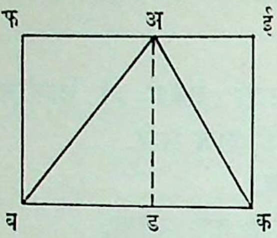
अर्थ : कोणत्याही त्रिकोणांत दोन बाजूंच्या बेरजेनें त्यांच्या अंतरास गुणावें व तिसऱ्या बाजूनें भागावें. हें फल तिसऱ्या बाजूंत मिळवून त्याचें अर्ध केल्यास पायाचा एक खंड मिळतो. व हें फळ तिसऱ्या बाजूंतून वजा करून अर्ध केल्यास पायाचा दुसरा खंड मिळतो.

शब्दार्थ : त्रिभुज = त्रिकोण; भुज = पायाखेरीज इतर बाजू; लब्धि = फल; भू = पाया; दलित = अर्धें केलेलें; आबाधा = पायाचें खंड, प्रक्षेप (projection).

प्रत्येक काटकोन त्रिकोणात (जे दोन लंबामुळें झाले आहेत ते) भुज व आबाधा यांचे वर्गांतर घेऊन त्याचें वर्गमूळ काढल्यास लंबाची लांबी मिळते. तसेंच लंब व भू (पाया) यांच्या गुणाकाराचा अर्ध एवढें क्षेत्रफळ होतें.

स्पष्टीकरण : आकृती ११ मध्ये **अबक** हा त्रिकोण दिला आहे. त्यांत **अब, अक, बक** यांच्या लांब्या माहीत आहेत. **अड** लंब आहे. **बड, कड** या आबाधा (projections) आहेत. तर **बड, कड** यांच्या किंमती काढणें.

सिद्धता : अब^2 = बड^2 + अड आणि अक^2 = कड^2 + अड^2



आकृति ११

वजा करून, अब^2 − अक^2 = बड^2 − कड^2

∴ (अब + अक) (अब − अक)

= (बड − कड) (बड + कड)

∴ भुजयोग × भुजांतर = (बड − कड) × पाया.

अर्थात बड + कड = पाया .... (१)

बड − कड = $\frac{\text{भुजयोग} \times \text{भुजांतर}}{\text{पाया}}$ ... (२)

∴ बेरीज करून, बड = $\frac{१}{२}\left\{\text{पाया} + \frac{\text{भुजयोग} \times \text{भुजांतर}}{\text{पाया}}\right\}$.

तसेंच वजा करून, कड = $\frac{१}{२}\left\{\text{पाया} - \frac{\text{भुजयोग} \times \text{भुजांतर}}{\text{पाया}}\right\}$ हें सिद्ध झालें.

येथे अब > अक, तर बड > कड.

तसेंच बड मिळाल्यावर काटकोन त्रिकोण सिद्धान्तानें अड = $\sqrt{\text{अब}^2 - \text{बड}^2}$

समजा, बकईफ या आयताचे क्षेत्रफळ पाहिजे. तर व्याख्येप्रमाणें

आयत बकईफ याचें क्षेत्र = बक × कई = बक × अड = भू × लंब.

आतां △ अबड = $\frac{१}{२}$ [आयत बडअफ], △ अकड = $\frac{१}{२}$ [आयत अईकड]

∴ △ अबड + △ अकड = $\frac{१}{२}$ [आयत बडअफ + आयत अईकड]

∴ △ अबक = $\frac{१}{२}$ आयत बकईफ = $\frac{१}{२}$ भू × लंब. हें सिद्ध.

वास्तविक हें स्पष्टीकरण देण्याची गरज नाहीं. ९ वी, १० वीच्या शालेय विद्यार्थ्यांस हें सूत्र ठाऊक असतें. जर ∠ क हा विशाल कोन असेल तर वरील समीकरणांत व सूत्रांत किंचित् बदल होईल.

उदाहरण १

श्लोक १६२

क्षेत्रे महीमनुमिता त्रिभुजे भुजौ तु ।
यत्र त्रयोदशतिथिप्रमितौ च मित्र ।।
तत्रावलंबकमितिं कथयावबाधे ।
क्षिप्रं तथा च समकोष्ठमितिं फलाख्याम् ।। १६२ ।।

अर्थ : मनु = १४; अवलंबक = लंब; अवबाधा = पायाखंड; समकोष्ठ = चौरस; फलाख्या = क्षेत्रफळ.

ज्या त्रिकोणांत पाया १४ आणि भुज १३ व १५ आहेत, त्यांत, हे मित्रा, पायावर काढलेल्या लंबाची लांबी, अवबाधांची लांबी व त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ चौरस एककांत सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें (आकृति ११ पाहा)

$$\text{बड} = \frac{१}{२}\left\{१४ + \frac{२८ \times २}{१४}\right\} = \frac{१}{२} \times १८ = ९. \text{ (१५ बाजूचा प्रक्षेप)}$$

$$\text{कड} = \frac{१}{२}\left\{१४ - \frac{२८ \times २}{१४}\right\} = \frac{१}{२} \times १० = ५. \text{ (१३ बाजूचा प्रक्षेप)}$$

$$\text{लंब अड} = \sqrt{१५^२ - ९^२} = \sqrt{१४४} = १२.$$

$$\text{क्षेत्रफळ} = \frac{१}{२} \times १४ \times १२ = ८४ \text{ चौरस एकक. हे उत्तर.}$$

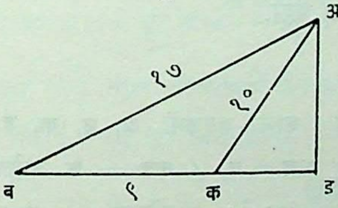
उदाहरण २

श्लोक १६३

दशसप्तदशप्रमौ भुजौ । त्रिभुजे यत्र नवप्रमा मही ।।
अबधे वद लंबकं तथा । गणितं गाणितिकाशु तत्र मे ।। १६३ ।।

अर्थ : एका त्रिकोणांत बाजू १० व १७ आहेत आणि पाया ९ आहे. तर त्याचा शिरोलंब व आबाधा यांचीं मानें सांग.

स्पष्टीकरण : वरील सूत्राप्रमाणें,



आकृति १२

$$\text{बड} = \frac{१}{२}\left\{९ + \frac{२७ \times ७}{९}\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{९ + २१\right\} = १५.$$

$$\text{कड} = \frac{१}{२}\left\{\frac{२७ \times ७}{९} - ९\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{२१ - ९\right\} = ६.$$

या ठिकाणीं कडची किंमत चिन्ह बदलून घ्यावी लागते. कारण $\angle$ **अकब** $>$ ९०° आहे.

सूत्र : (चक्रीय) चौकोनाचें क्षेत्रफळ काढण्याचें सूत्र व त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचें सूत्र.

श्लोक १६४

सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं । बाहुभिविरहितं च तद्वधात् ।।
मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे । स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके ।। १६४।।

अर्थ : चौकोनाच्या चार बाजूंच्या बेरजेच्या अर्धांतून प्रत्येक बाजू वजा करावी. येणाऱ्या चार संख्यांचा गुणाकार करून वर्गमूळ घ्यावे. म्हणजे चौकोनाचें आसन्न क्षेत्रफळ येतें. मात्र हेंच सूत्र त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ स्पष्ट (नक्की किंमतीचें) देतें. (अर्थात् चौकोन चक्रीय असल्यास चौकोनाचें क्षेत्रफळ स्पष्ट येतें.)

स्पष्टीकरण : समजा चौकोनाच्या चार बाजू **अ, ब, क, ड** आहेत.

जर $\text{स} = \dfrac{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\text{ड}}{२}$ घेतलें,

तर **स – अ, स – ब, स – क, स – ड** यांचा गुणाकार घेऊन त्याच्या वर्गमुळाएवढें क्षेत्रफळ होईल. अर्थात् ही किंमत स्फुट नाहीं. (स्फुट = स्पष्ट, exact)

येथें क्षेत्रफळ $= \sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ब})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ड})}$ ……… (१)

तसेंच चौकोनाची एक बाजू ० समजल्यास त्रिकोण तयार होईल.

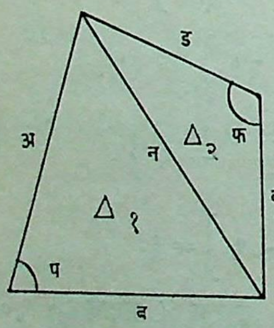
जर ड = ०, तर $\text{स} = \dfrac{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}}{२}$ आणि

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $= \sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ब})(\text{स}-\text{क})(\text{स})}$ असें सूत्र झालें.

त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचें सूत्र हें हेरॉनचें सूत्र आहे असें म्हणतात. हेरॉन हा ग्रीक गणिती इ. स. पूर्वी २०० वर्षें या कालीं होऊन गेला. सूत्र (१) हें वृत्तस्थ चतुरस्रास म्हणजे चक्रीय चौकोनास बरोबर लागू पडतें, पण तें अचक्रीय चौकोनास लागू पडत नाहीं. अचक्रीय चौकोनाचें क्षेत्रफळ

$= \sqrt{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{ब})\ (\text{स}-\text{क})\ (\text{स}-\text{ड})} - \text{अबकड}\ (\text{कोज्या ट})^{२}$

यांत $\angle \text{ट} = \dfrac{\angle\text{प} + \angle\text{फ}}{२}$. पुढील आकृति १३ पहा.



आकृति १३

सूत्रसिद्धि :

समजा चौकोनाच्या बाजू अनुक्रमें **अ, ब, क, ड** आहेत, कर्ण **न** आहे व $\angle\ \text{अब} = \text{प}$, $\angle\ \text{कड} = \text{फ}$ आहेत.

[ज्या = sine]; [कोज्या = cosine].

म्हणून $\Delta_१ = \dfrac{\text{अ ब}}{२}\text{ज्या}(\text{प})$, $\Delta_२ = \dfrac{\text{कड}}{२}\text{ज्या}(\text{फ})$.

बेरजेनें, चतुर्भुज फल Δ

$= \frac{१}{२}\{\text{अब} \times \text{ज्या}(\text{प}) + \text{कड} \times \text{ज्या}(\text{फ})\}$.

तसेंच, $\text{न}^{२} = \text{अ}^{२}+\text{ब}^{२} - २\,\text{अब} \times \text{कोज्या}(\text{प}) = \text{क}^{२}+\text{ड}^{२} - २\text{कड} \times \text{कोज्या}(\text{फ})$.

$\therefore \text{अ}^{२}+\text{ब}^{२}-\text{क}^{२}-\text{ड}^{२} = २\{\text{अब} \times \text{कोज्या}(\text{प}) - \text{कड} \times \text{कोज्या}(\text{फ})\} = ०$

$\therefore १६\,\Delta^{२} + (\text{अ}^{२}+\text{ब}^{२}-\text{क}^{२}-\text{ड}^{२})^{२}$

$= ४\{\text{अ}^{२}\text{ब}^{२} + \text{क}^{२}\text{ड}^{२} - २\,\text{अबकड}\,(\text{को प. को फ} - \text{ज्या प. ज्या फ})\}$

$= ४\,\text{अ}^{२}\text{ब}^{२} + ४\text{क}^{२}\text{ड}^{२} - ८\,\text{अबकड} \times \text{को}(\text{प}+\text{फ})$.

जर कोन $\text{प} + \text{फ} = २\,\text{ट}$ मानला, तर

$$१६\,\Delta^{२} = ४\,\text{अ}^{२}\text{ब}^{२} + ४\,\text{क}^{२}\text{ड}^{२} - (\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२} - \text{क}^{२} - \text{ड}^{२})^{२} - ८\,\text{अबकड} \times \text{को}\,(२\,\text{ट}).$$

$$= \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad - ८\,\text{अबकड}\,\{\,२\,\text{को}^{२}\,(\text{ट}) - १\,\}.$$

$$= ४\,(\text{अब} + \text{कड})^{२} - (\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२} - \text{क}^{२} - \text{ड}^{२})^{२} - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}^{२}(\text{ट}).$$

$$= \{\,२\,\text{अब} + २\,\text{कड} + \text{अ}^{२} + \text{ब}^{२} - \text{क}^{२} - \text{ड}^{२}\,\} \times \{\,२\,\text{अब} + २\,\text{कड} - \text{अ}^{२} - \text{ब}^{२} + \text{क}^{२} + \text{ड}^{२}\,\} - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}^{२}(\text{ट}).$$

$$= \{(\text{अ}+\text{ब})^{२} - (\text{क}-\text{ड})^{२}\}\{(\text{क}+\text{ड})^{२} - (\text{अ}-\text{ब})^{२}\} - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}^{२}(\text{ट}).$$

$$\therefore\ १६\,\Delta^{२} = \{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}-\text{ड}\}\{\text{अ}+\text{ब}-\text{क}+\text{ड}\} \times \{\text{क}+\text{ड}+\text{अ}-\text{ब}\}\{\text{क}+\text{ड}-\text{अ}+\text{ब}\} - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}^{२}(\text{ट}).$$

जर $\text{अ} + \text{ब} + \text{क} + \text{ड} = २\,\text{स}$,

तर $\text{अ} + \text{ब} + \text{क} - \text{ड} = \text{अ} + \text{ब} + \text{क} + \text{ड} - २\,\text{ड} = २\,\text{स} - २\,\text{ड} = २\,(\text{स} - \text{ड})$.

या प्रमाणें किंमती लिहून,

$$१६\,\Delta^{२} = २(\text{स}-\text{अ}) \times २(\text{स}-\text{ब}) \times २(\text{स}-\text{क}) \times २(\text{स}-\text{ड}) - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}^{२}(\text{ट}).$$

$$= १६\,(\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{ब})\,(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ड}) - १६\,\text{अबकड} \times \text{को}\,(\text{ट}).$$

१६ ने भागून,

$$(\text{क्षेत्र})^{२} = (\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{ब})\,(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ड}) - \text{अबकड}\,\text{को}^{२}(\text{ट}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (१)$$

आतां चतुष्कोण वृत्तस्थ असल्यास, $\angle\,\text{प} + \angle\,\text{फ} = १८०^{\circ}$.

$$\therefore\ \angle\,\text{ट} = ९०^{\circ} \quad \therefore\ \text{कोज्या}\,(\text{ट}) = ०.$$

अर्थात् वृत्तीय चतुष्कोणांत, $(\text{क्षेत्र})^{२} = (\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{ब})\,(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ड})$.

$$\therefore\ \text{क्षेत्र} = \sqrt{(\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{ब})\,(\text{स}-\text{क})\,(\text{स}-\text{ड})}, \quad \ldots \quad (२)$$

तसेंच, जर $\text{ड} = ०$ तर $\text{स} = \dfrac{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}}{२}$ आणि त्रिकोणास परिवर्तुळ असतेंच.

$\therefore$ सूत्र (२) वरून, त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $= \sqrt{\text{स}\,(\text{स}-\text{अ})\,(\text{स}-\text{ब})\,(\text{स}-\text{क})} \ldots (३)$

अशा प्रकारें तीन्ही सूत्रें सिद्ध झालीं.

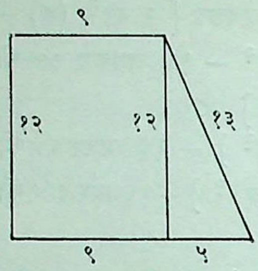
उदाहरण १

श्लोक १६५

भूमिश्चतुर्दशकरा मुखमंकसंख्यम् ।
बाहू त्रयोदशदिवाकरसंमितौ च ।।
लंबोऽपि यत्र रविसंख्यक एव तत्र ।
क्षेत्रे फलं कथय तत्कथितं यदाद्यैः ।। १६५ ।।

अर्थ : एका चौकोनाचा पाया १४ हात, वरची बाजू ९ हात आणि इतर दोन बाजू अनुक्रमें १२ व १३ हात आहेत. तसेंच लंब १२ हात आहे. तर क्षेत्रफळ काय ?

स्पष्टीकरण : हा चौकोन समांतरद्विभुज असावा असें वर्णनावरून वाटतें. कारण लंब १२ व एक बाजू १२ च आहे. आकृति १४ पहा.



आकृती १४

इतकेंच नव्हे तर आकृतींतला त्रिकोण जात्य आहे,

$$\text{क्षेत्रफळ} = \text{१२}\times\text{९} + \frac{\text{१}}{\text{२}} \times \text{५} \times \text{१२}$$

$$= \text{१०८} + \text{३०} = \text{१३८}.$$ तसेंच बाजूंची बेरीज ४८.

वरील सूत्र (२) लावून,

$$\text{क्षेत्रफळ} = \sqrt{(\text{२४}-\text{१४})(\text{२४}-\text{१३})(\text{२४}-\text{१२})(\text{२४}-\text{९})}$$

$$= \sqrt{\text{१०}\times\text{११}\times\text{१२}\times\text{१५}} = \sqrt{\text{१९८००}} = \text{१४०.७ आसन्न},$$

अर्थात्, सूत्र (२) लागू पडत नाहीं याचें कारण चौकोन चक्रीय नाहीं हे होय.

उदाहरण २

श्लोक १६२ मध्यें दिलेल्या त्रिभुजाचें क्षेत्रफळ सूत्र (३) नें काढूं.
येथें भूमि १४ व भुज १५, १३ आहेत.

$$\therefore\ \textbf{स} = \frac{\text{४२}}{\text{२}} = \text{२१}.\quad \textbf{स} - \text{अ} = \text{७},\quad \textbf{स} - \textbf{ब} = \text{६},\quad \textbf{स} - \textbf{क} = \text{८}.$$

$$\text{क्षेत्रफळ} = \sqrt{\text{२१}\times\text{७}\times\text{६}\times\text{८}} = \sqrt{\text{७}^{\text{२}}\times\text{३}^{\text{२}}\times\text{४}^{\text{२}}}$$

$$= \text{७}\times\text{३}\times\text{४} = \text{८४ हें उत्तर}.$$

श्लोक १६६

चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौ । कथं ततोऽस्मिन्नियतं फलं स्यात् ॥
प्रसाधितौ तच्छ्रवणौ यदाद्यैः । स्वकल्पितौ तावितरत्र न स्तः ॥१६६॥

अर्थ : चतुरस्राचें क्षेत्रफळ काढण्याचें सूत्र निर्णायक मूल्य देऊं शकत नाहीं. याचें कारण त्याचे कर्णांची लांबी अनिश्चित असते. म्हणून क्षेत्राचें स्पष्ट फल कसें बरें मिळूं शकेल? पूर्वींच्या गणितज्ञांनीं आपापली आकृति घेऊन कर्णाच्या किंमती ठरविल्या होत्या. इतर आकृतींत त्या कल्पनेनें समजणार नाहींत.

श्लोक १६७

तेष्वेव बाहुष्वपरौ च कर्णौ । अनेकधा क्षेत्रफलं ततश्च ॥१६७॥

अर्थ : चौकोनाचे चारही भुज तेच असले तरी कर्णमानें निरनिराळीं असूं शकतात. अर्थात् कर्ण-द्वयें अनेक तर क्षेत्रफळही निरनिराळें.

स्पष्टीकरण : आधुनिक शालेय विद्यार्थ्यांस हें ठाऊक असतें की, त्रिकोण रचतांना त्रिकोणा-संबंधीं तीन स्वतंत्र (independent) मानें द्यावी लागतात. त्रिकोणाचे तीन कोन हे परस्पर–संबद्ध (बेरीज १८०) असतात. म्हणून तीन कोन दिले असतां अपेक्षित आकाराचा त्रिकोण तयार होऊं शकत नाहीं. कारण त्रिकोणाशी संबंधित अशी कुठलीच लांबी ठाऊक नाहीं; अतएव समरूप त्रिकोण मिळेल पण निःसंदिग्ध भुजांचा त्रिकोण मिळणार नाहीं.

त्याचप्रमाणें, पाच स्वतंत्र मानें दिल्याशिवाय चतुर्भुज निश्चित होत नाहीं. चार बाजू व निदान १ कर्ण किंवा १ कोन दिल्यास चतुर्भुज निश्चित होतो. अर्थात् त्याचे क्षेत्रफळ निर्णायक होतें. श्लोक १६५ मधील चतुर्भुजाची आकृती समलंबचतुर्भुज अशी दिली आहे ही गोष्टच ५ वें देय (data) आहे. म्हणून क्षेत्र-निश्चिति झाली. केवळ ४ बाजू दिल्यानें चौकोनाची आकृति अनिश्चित राहते. चौकोन चक्रीय आहे हें सांगणें हेंच ५ वें देय सूत्र (२) मध्यें आहे. म्हणून तेथें ∠ट=९० अंश होऊन सूत्र (२) निर्णायक बनलें.

श्लोक १६८

लंबयोः कर्णयोर्वैकं अनिर्दिश्यापरः कथम् ।
पृच्छत्यनियतत्वेऽपि नियतं चापि तत्फलम् ।।१६८।।

श्लोक १६९

स पृच्छकः पिशाचो वा वक्ता वा नितरां ततः ।
यो न वेत्ति चतुर्बाहुक्षेत्रस्यानियतां स्थितिम् ।।१६९।।

अर्थ : ज्या चौकोनांत लंब किंवा कर्ण यांपैकीं एकही ठाऊक नाहीं, तेथें क्षेत्रफळ अनिश्चित असतांना त्याचें फल निर्णायक समजून विचारतो, हें कसें ? जो पृच्छक असें विचारतो तो पिशाच्च असला पाहिजे आणि सांगणारा त्याहून मोठें पिशाच्च असला पाहिजे. कारण त्यालाच हा सिद्धान्त ठाऊक नाहीं कीं चौकोनाच्या चार बाजू दिल्या तरी त्याचे क्षेत्रफळ अनिश्चित असतें.

श्लोक १७०, १७१, १७२

इष्टा श्रुतिस्तुल्यचतुर्भुजस्य । कल्प्याथ तद्वर्गविवर्जिता या ।।
चतुर्गुणा बाहुकृतिस्तदीयं । मूलं द्वितीय-श्रवणप्रमाणम् ।।१७०।।

अतुल्यकर्णाभिहतिद्विभक्ता । फलं स्फुटं तुल्यचतुर्भुजे स्यात् ।।
समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च । तथाऽऽयते तद्भुजकोटिघातः ।।१७१।।

चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलंबे । लंबेन निघ्नं कुमुखैक्यखंडम् ।।१७२।।

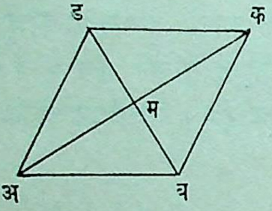
अर्थ : (समभुज चौकोनाची एक भुजा व कर्ण दिला असतां,) भुजवर्गाच्या चौपटींतून कर्णाचा वर्ग वजा दिल्यास बाकीचें वर्गमूळ हें दुसऱ्या कर्णाचें मान होय.

(समभुजाचे दोन्ही कर्ण दिले असतां,) कर्णांचा गुणाकार करून त्याचें अर्ध घेतल्यास समभुजाचें क्षेत्रफळ मिळतें.

(समकर्ण समचतुर्भुजाचें किंवा आयताचे क्षेत्रफळ काढावयाचें असल्यास,) भुज व कोटि यांचा गुणाकार हेंच क्षेत्रफळ.

(समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढावयाचें असल्यास,) दोन्ही समांतर बाजूंच्या बेरजेच्या अर्धास लंबानें गुणावें.

स्पष्टीकरण : आकृति १५ तुल्यचतुर्भुजाची आहे. यांत **अब** = **बक** = **कड** = **अड.**



आ. १५.

आतां **अब, अक** दिल्यास **बड** काढणें.

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्पर लंब असतात. तसेच ते एकमेकांस दुभागतात.

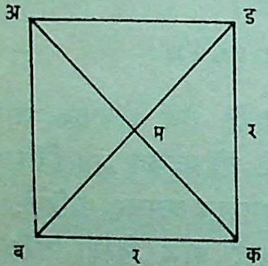
$\therefore$ △ **अमब** मध्यें **अब**^{2} = **अम**^{2} + **मब**^{2}

$$\therefore \frac{४\ \text{अब}^2}{२} = \frac{४\ \text{अम}^2}{२} + \frac{४\ \text{मब}^2}{२} = \text{अक}^2 + \text{बड}^2$$

$\therefore$ **बड**^{2} = ४ **अब**^{2} − **अक**^{2}, किंवा **बड** = $\sqrt{४\ \text{अब}^2 - \text{अक}^2}$

तसेंच समभुजाचें क्षेत्र = आकृतींत, मध्याशी झालेल्या, ४ काटकोन त्रिकोणांची बेरीज.

$\therefore$ क्षेत्रफळ $= \frac{४}{२} \times \frac{१}{२}$ **अक** $\times \frac{१}{२}$ **बड** $= \frac{१}{२} \times$ **अक** × **बड**, हें सूत्र सिद्ध.



आ. १६.

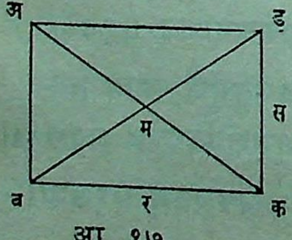
आकृति १६ ही सुद्धा तुल्यचतुर्भुजाची आहे, परंतु यांतील कर्ण समान लांबीचे आहेत.

समकर्ण समभुजाचें चारही कोन प्रत्येकी ९०° चे असतात.

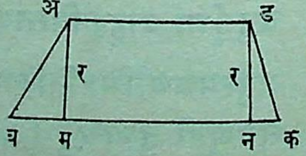
तसेच आयताचे चारही कोन ९०° असतात.

म्हणून चौरसाचे क्षेत्रफळ = **र**×**र**=**र**^{2}.

खाली दिलेल्या दोनही आकृती चतुर्भुजांच्या (चौकोनांच्या) आहेत. परंतु आकृति १७ आयताची (काटकोन चौकोनाची) आहे. आणि आकृति १८ ही समांतर-द्विभुज चतुर्भुजाची आहे.



आ. १७.



आ. १८.

अबकड आयतांत क्षेत्रफळ = **र × स.**

अबकड हा समांतर-द्विभुज चतुर्भुज आहे, आणि

त्याचे क्षेत्रफळ = △ **अबम**+आयत **अमनड** + △ **नकड.**

येथे **अम** = **नड** = **र**, तर

$$\text{क्षेत्रफळ} = \frac{१}{२}(\text{बम}\times\text{र}) + (\text{मन}\times\text{र}) + \frac{१}{२}(\text{नक}\times\text{र})$$

$$= \frac{१}{२}\text{र}(\text{बम} + २\,\text{मन} + \text{नक})$$

$$= \frac{१}{२}\text{र}(\text{बम} + \text{मन} + \text{नक} + \text{मन})$$

$$= \frac{१}{२}\text{र}(\text{बक} + \text{अड}),$$ हें सूत्र सिद्ध.

उदाहरण

श्लोक १७३

क्षेत्रस्य पंचकृतितुल्यचतुर्भुजस्य ।
कर्णौ ततश्च गणितं गणक प्रचक्ष्व ।।
तुल्यश्रुतेश्च खलु तस्य तथाऽऽयतस्य ।
यद्विस्तृती रसमिताष्टमितं च दैर्घ्यम् ।। १७३ ।।

अर्थ : (१) एका समभुज चौकोनांत भुज २५ आहे, तर एका कर्णाची इष्ट लांबी धरून दुसऱ्या कर्णाची लांबी काढ. (२) तसेंच, समभुजाचे कर्ण सारखे असल्यास त्याचें क्षेत्रफळ सांग. (३) त्याचप्रमाणें, ज्या आयताचे भुज व कोटि अनुक्रमें ६ व ८ आहेत त्याचें क्षेत्रफळ सांग.

स्पष्टीकरण : श्लोक १७२ मधील समभुजाची आकृति १६ पहा.

त्यांत **अब** = २५. समजा **बड** = ३०, तर

(१) $\text{अब}^2 = \frac{\text{बड}^2}{४} + \frac{\text{कअ}^2}{४}$. $\therefore २५^2 = \frac{९००}{४} + \frac{\text{कअ}^2}{४}$

$\therefore$ २५०० − ९०० = कअ^2. अर्थात कअ^2 = १६००, $\therefore$ **कअ** = ४०.

(२) क्षेत्रफळ = $\frac{३० \times ४०}{२}$ = ६०० चौरस एकक.

समभुजाचे कर्ण समान होतील तर तो चौरस होईल.

$\therefore$ क्षेत्रफळ = २५ × २५ = ६२५ चौरस एकक.

(३) आयताचें क्षेत्रफळ = ६ × ८ = ४८ चौरस एकक.

उदाहरण १

श्लोक १७४

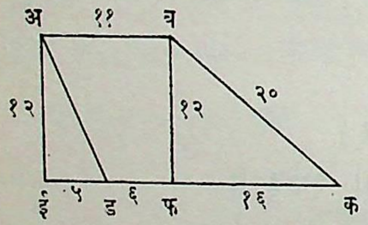
> क्षेत्रस्य यस्य वदनं मदनारितुल्यम् ।
> विश्वंभराद्द्विगुणितेन मुखेन तुल्या ।।
> बाहू त्रयोदशनख-प्रमितौच लंबः ।
> सूर्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ।। १७४ ।।

अर्थ : ज्या समांतरद्विभुज चौकोनाचें मुख (वरची बाजू) ११ आणि भूमि (विश्वंभरा) २२ आहे, तसेच इतर भुज १३ व २० लांबीचे आहेत आणि लंब १२ आहे, त्याचें क्षेत्रफळ सांग.

स्पष्टीकरण : आकृति १९ मध्ये **अबकड** हा समांतरद्विभुज दाखविला आहे. त्यांत मुख्यत्वेंकरून तिरप्या बाजू एकाच दिशेनें झुकतात असें दिसतें.

सूत्राप्रमाणें, क्षेत्रफळ $= \frac{१}{२} \times १२ \; (११ + २२) = १९८$ चौरस एकक.

त्याच आकृतींत **अबकड** हा समलंब चतुरस्र असल्यास



आ. १९

अब = ११, **बक** = २०, **कड** = २२, **अड** = १३.

समजा **अई** व **बफ** लंब आहेत.

तर $\textbf{कफ}^2 = २०^2 - १२^2 = २५६$.

∴ **कफ** = १६. **डफ** = ६. **डई** = ५ आणि

$\textbf{अड}^2 = १२^2 + ५^2 = १६९$ ∴ **अड** = १३.

अर्थात, सामान्य समलंबांत **अड**, **बक** विरुध्द दिशेनें असतात.

या प्रश्नांत भास्कराचार्यांनें जरुरीपेक्षां जास्त देयें (data) दिलेलीं आहेत. समलंबाची उंची दिली नसती तरी चाललें असतें. कारण चौकोन निश्चित करण्यासाठीं ६ देयें जरूर नाहींत; ५ दिलीं तरी पुरतात. आकृति १९ मध्ये चारही भुजा दिल्या आहेत असें समजू.

समजा **बफ** = **क्ष** आणि **फक** = **य**.

तर $\textbf{य}^2 = ४०० - \textbf{क्ष}^2$. आतां **फड** = २२, **फक** = **य.** तर **डफ** = २२ − **य**.

तसेंच **फई** = ११. ∴ **डई** = ११ − (२२ − **य**) अर्थात **डई** = **य** − ११.

आणि कर्णवर्गसिद्धांतानें $(\textbf{य} - ११)^2 = १३^2 - \textbf{क्ष}^2$.

$$\therefore \; \textbf{य}^2 - २२\textbf{य} + १२१ = १६९ - \textbf{क्ष}^2 \quad \dots \quad \dots \quad (१)$$

$$\textbf{य}^2 \qquad\qquad = ४०० - \textbf{क्ष}^2 \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

वजाबाकीनें $-२२\textbf{य} + १२१ = -२३१$ ∴ $२२\textbf{य} = २५२$ ∴ **य** = १६.

आणि $\textbf{क्ष}^2 = ४०० - २५६ = १४४$, ∴ **क्ष** = १२.

क्षेत्रफळ अर्थात् पूर्वीप्रमाणें मिळेलच.

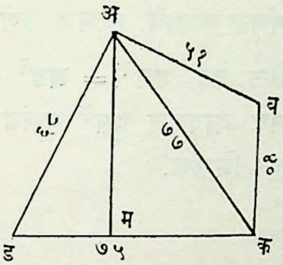
उदाहरण २

श्लोक १७५

पंचाशदेकसहिता वदनं यदीयम् ।
भूः पंचसप्ततिमिता प्रमितोऽष्टषष्ट्या ॥
सव्यो भुजो द्विगुणविंशतिसंमितोऽन्यः ।
तस्मिन्फलं श्रवणलंबमिती प्रचक्ष्व ॥१७५॥

अर्थ : ज्या विषम चौकोनांत मुख (वरची बाजू) ५१ आहे, पाया ७५ आहे, डावी बाजू ६८ आहे आणि उजवी बाजू ४० आहे अशा चौकोनाचें क्षेत्रफळ, कर्ण व लंब सांग.

स्पष्टीकरण : (आकृति २० पहा.) येथें हें लक्षांत येईल कीं देयें ४ च आहेत. म्हणून एकाद्या कर्णाची लांबी गृहीत धरणें क्रमप्राप्त आहे.



आ. २०

असें समजूं कीं, **अक** = ७७. तर त्रिकोण **अकड** यांत आबाधा **मक** खाली दिल्याप्रमाणे.

$$\text{मक} = \left\{\frac{(६८+७७)(७७-६८)}{७५} + ७५\right\} \times \frac{१}{२}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{\frac{१४५ \times ९}{७५} + ७५\right\} = \frac{१}{२}\left\{\frac{८७}{५} + ७५\right\} = \frac{१}{२}\left\{\frac{४६२}{५}\right\} = \frac{२३१}{५}.$$

त्याचप्रमाणें **मड** $= \frac{१}{२}\left\{७५ - \frac{८७}{५}\right\} = \frac{२८८}{२ \times ५} = \frac{१४४}{५}.$

आणि लंब **अम**$^२ = ६८^२ - \frac{१४४^२}{२५} = \frac{३४०^२ - १४४^२}{२५}.$

अर्थात् **अम**$^२ = \frac{४८४ \times १९६}{२५}$. ∴ लंब **अम** $= \frac{२२ \times १४}{५} = \frac{३०८}{५}$, हें उत्तर.

चौकोनाचें क्षेत्रफळ = △ **अडक** + △ **अबक**.

△ **अडक** $= \sqrt{११० \times ३३ \times ३५ \times ४२}$
$= ११ \times ७ \times ५ \times ३ \times २ = २३१०$ चौरस एकक.

तसेंच △ **अबक** $= \sqrt{८४ \times ७ \times ३३ \times ४४} = ९२४$ चौरस एकक.

∴ चौकोनाचें क्षेत्रफळ = ३२३४ चौरस एकक.

हेंच क्षेत्रफळ १६४ श्लोकांतल्या सूत्र (१) नें काढल्यास,

चौकोनाचें क्षेत्रफळ $= \sqrt{४९ \times ७७ \times ४२ \times ६६} = ७ \times ७ \times ११ \times ६$
= ३२३४ चौरस एकक.

यावरून दिसतें कीं दिलेला चौकोन हा एकचक्रीय आहे.

अर्थात्; आकृतींत जर आपण $\angle$**क** $= ९०^\circ$ असें गृहीत धरलें तर कर्ण **बड** मिळूं शकेल.

कारण **बड**$^2 = ७५^2 + ४०^2 = ७२२५$

$\therefore$ **बड** $= ८५$. शिवाय, $८५^2 = ६८^2 + ५१^2$ $\therefore \angle$**डअब** $= ९०^\circ$.

अर्थात्, चौकोन **अबकड** चक्रीय झाला.

सूत्र : विषम चौकोनांत कर्णाची लांबी काढण्याचें सूत्र.

श्लोक १७६

यल्लंबलंबाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽबधा सा ।
तदूनभूवर्गसमन्वितस्य यल्लंबवर्गस्य पदं स कर्णः ॥१७६॥

अर्थ : लंब व लंबाश्रित भुज यांच्या वर्गांच्या अंतराचें मूळ ती आबाधा. ही भूमींतून वजा करून, शेषाच्या वर्गांत लंबवर्ग मिळवावा व बेरजेचें वर्गमूळ काढावें. म्हणजे कर्ण मिळतो.

स्पष्टीकरण : (आकृति २० पहा). जर लंब **अम** दिला असेल तर **डम**^{2} = **अड**^{2} − **अम**^{2}. यावरून भूखंड **मड** मिळाला. नंतर **कम** = **कड** − **मड** यावरून दुसरें भूखंड मिळालें. तसेंच कर्ण **अक** हा, **अक**^{2} = **अम**^{2} + **मक**^{2} यावरून मिळेल.

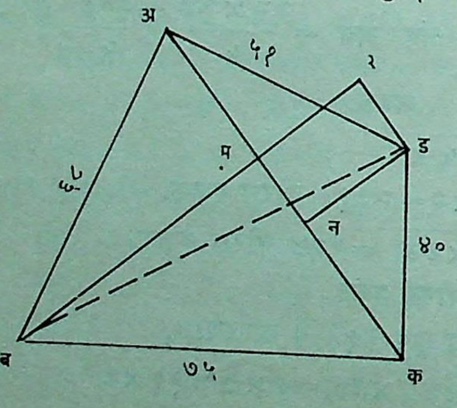
सूत्र : विषमभुज चौकोनांतील दुसरा कर्ण काढण्यासाठीं.

श्लोक १७७, १७८

इष्टोऽत्र कर्णः प्रथमं प्रकल्प्यः । त्र्यस्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये ।
कर्णं तयोः क्ष्मामितरौ च बाहू । प्रकल्प्य लंबावबधे प्रसाध्ये ॥ १७७ ॥

आबाधयोरेक ककुप्स्थयोर्यत् । स्यादन्तरं तत्कृतिसंयुतस्य ॥
लंबैक्यवर्गस्य पदं द्वितीयः । कर्णो भवेत्सर्वचतुर्भुजेषु ॥ १७८ ॥

अर्थ : शब्दांचे अर्थ : (क्ष्मा = पाया, ककुभ् = शिरोबिंदु). आकृति २१ पहा.



आ. २१.

अबकड या चतुर्भुजाच्या बाजू दिल्या आहेत असें समजूं. **अक** कर्ण इष्टसंख्यात्मक कल्पून, △ **अबक** व △ **अडक** यांच्या भुजा आपणांस ठाऊक आहेत. समजा **बम**, **डन** हे **अक** वर लंब आहेत. तर आबाधा **अम**, **मक** (**अक** पाया धरून), श्लोक १७५ मध्यें दाखविल्याप्रमाणें, काढतां येतात. तसेंच लंबहि मिळूं शकतो. याच रीतीनें △ **अडक** मध्यें **अन**, **नक**, **नड** मिळतात.

∴ **मन** = **डर** मिळतील, आणि **बर** = **बम** + **मर** = **बम** + **नड** मिळेल.
नंतर **बड**^{२} = **बर**^{२} + **रड**^{२} यावरून दुसरा कर्ण **बड** मिळेल.

अर्थ : प्रथम एका सोयीस्कर कर्णाची लांबी गृहीत धरावी. [ती कशी ?].
चतुर्भुजाचे कर्ण पाया धरल्यास, त्या कर्णानें २ त्रिकोण होतात. या प्रत्येक त्रिकोणांत लंब **बम** आणि भूखंडें **अम**, **मक**, तसेंच **नड**, **अन**, **नक** मिळतात. या आबाधा एकाच शिरोबिंदूपासून मोजून त्यांतल्या अंतराचा वर्ग करावा. या वर्गात लंबांच्या बेरजेचा वर्ग मिळवून त्या फलाचें वर्गमूळ घ्यावें म्हणजे कर्ण मिळतो.

मागील प्रश्नाला हें सूत्र लावून कर्ण **बड** काढूं.
(आकृति २१ पहा) पूर्वीप्रमाणें **अक** = ७७.

$$\text{अम} = \frac{१}{२}\left\{ -\frac{(६८+७५)\ (७५-६८)}{७७} + ७७ \right\} = \frac{१}{२}\ (७७-१३) = ३२.$$

मक = ७७ − ३२ = ४५. **बम**^{२} = ६८^{२} − ३२^{२} = १०० × ३६ ∴ **बम** = ६०.

$$\text{अन} = \frac{१}{२}\left\{ \frac{(५१+४०)\ (५१-४०)}{७७} + ७७ \right\}$$

$$= \frac{१}{२}\ (७७+१३) = ४५,\quad \text{नक} = ३२.\quad \therefore \text{मन} = ४५ - ३२ = १३.$$

नड^{२} = ४०^{२} − ३२^{२} = ७२ × ८ ∴ **नड** = २४.
लंबयुति = ६० + २४ = ८४. अर्थात् **बड**^{२} = ८४^{२} + १३^{२} = ८५^{२}
∴ दुसरा कर्ण = ८५.

सूत्र : चौकोनाचें क्षेत्रफळ काढणें.

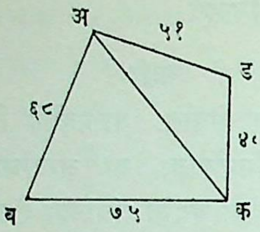
श्लोक १७९, १८०

कर्णाश्रितस्वल्पभुजैक्यमुर्वी । प्रकल्प्य तच्छेषभुजौ च बाहू ।।
साध्योऽवलंबोऽथ तथान्यकर्णः । स्वोर्व्याः कथंचिच्छ्रवणो न दीर्घः ।।१७९।।

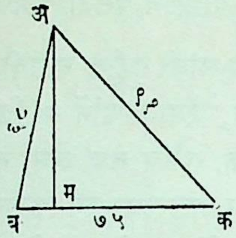
तदन्यलंबान्न लघुस्तथेदं । ज्ञात्वेष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः ।।
त्र्यस्त्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये । तयोः फलैक्यं फलमत्र नूनं ।। १८० ।।

अर्थ चौकोनाच्या ज्या दोन बाजू सर्वांत लहान असतील त्यांची बेरीज ही पाया समजून उरलेल्या दोन बाजू आणि हा पाया यांचा त्रिकोण कल्पावा. या त्रिकोणाचा लंब (मूळ पायावरील)काढावा. [आतां कर्णाची लांबी ही चल (variable) किंवा अनिश्चित आहे. कर्ण जास्तींत जास्त असली तरी तिला न्यूनतम व उच्चतम अशा मर्यादा आहेत.] कर्ण जास्तींत जास्त वरील पायाएवढा व कमींत कमी वरील लंबाएवढा असेल म्हणून इष्ट कर्णाची लांबी या दरम्यान घ्यावी. हुशार माणसाला हें सहज समजेल. नंतर या कर्णानें जें दोन त्रिकोण होतात त्यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज केली म्हणजे चतुर्भुजाचें क्षेत्रफळ मिळतें.

स्पष्टीकरण : (आकृति २२) **अबकड** हा चौकोन आहे. त्याच्या भुजांच्या लांब्या ठाऊक आहेत. पण पांचवें देय (data) दिलेलें नाहीं. भास्कराचार्य म्हणतो कीं येथें **अक** कर्णाची लांबी तारतम्यानें घेतली म्हणजे क्षेत्रफळ काढतां येईल, तसेंच दुसरा कर्ण देखील मोजतां येईल.



आ- २२



आ. २३

अक कर्णाची लांबी अर्थातच ४० + ५१ म्हणजे ९१ पेक्षां कमी असणारच. कारण त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त असते.

तसेंच शेजारच्या आकृति २३ मध्ये △ **अबक** मध्यें **अक** = ९१ समजून **अम** लंबाची किंमत काढली तर त्यापेक्षां आकृति २२ मधील **अक** अर्थातच मोठी असली पाहिजे. त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचें आसन्न मूल्य घेऊन **अम** = अजमासें ६६.

∴ कर्ण **अक** हा ६६ पेक्षां जास्त व ९१ पेक्षां कमी इतका घेतला पाहिजे, म्हणून भास्कराचार्यानें त्याची किंमत ७७ धरून दुसरा कर्ण ८५ व क्षेत्रफळ ३२३४ चौरस कक काढलें.

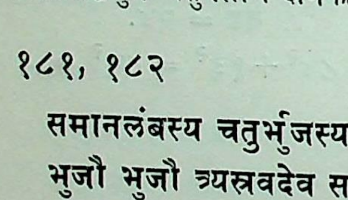
सूत्र : समांतरद्विभुज चतुरस्राचें क्षेत्रफळ काढणें.

श्लोक १८१, १८२

समानलंबस्य चतुर्भुजस्य। मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिम्।
भुजौ भुजौ त्र्यस्त्रवदेव साध्ये। तस्याबधे लंबमितिस्ततश्च ॥ १८१ ॥

आबाधयोना चतुरस्त्रभूमिः। तल्लंबवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात्।।
समानलंबे लघुदोः कुयोगात्। मुखान्यदोः संयुतिरल्पिका स्यात् ॥१८२॥

अर्थ : दिलेल्या समलंब चतुर्भुजाच्या समांतर भुजांतील फरक हा पाया धरून व तिरपे भुज हे भुज धरून एक त्रिकोण काढावा. यांत भूखंडे व लंब यांचीं मानें काढावीं. नंतर चौकोनाच्या पायांतून एक भूखंड वजा करून त्याच्या वर्गात लंबवर्ग मिळवून त्याचें वर्गमूळ घ्यावें म्हणजे एक कर्ण मिळतो. तसेंच हेंही उघड आहे कीं अशा चौकोनांत पाया व लहान बाजू यांची बेरीज, दुसरी बाजू व मुख याच्या बेरजेपेक्षां, मोठी असते.



आ. २४

स्पष्टीकरण : (आकृति २४ पाहा) **अबकड** हा समलंब चौकोन आहे. याच्या चारही बाजू दिलेल्या असतां कर्णांच्या लांब्या पाहिजेत.

रीत : **बक** मधून **अड** वजा करा. जर **अड**=**ईक** तर **अई** जोडा. आकृति **अडकई** हा समांतरभुज चौकोन झाला, आणि **अबई** या त्रिकोणाच्या तिन्ही

बाजू ठाऊक झाल्या. या त्रिकोणाची भूमि **बई**, तसेंच भुज **अब**, **अई** ठाऊक आहेत. त्रिकोणाच्या पायाचे खंड **बम**, **ईम** व लंब **अम** काढतां येतात. नंतर **बक** मधून **बम** वजा केले म्हणजे काटकोन त्रिकोण **अमक** राहतो. यांत **अम**, **मक** ठाऊक आहेत.

$\therefore$ कर्ण **अक** $= \sqrt{\text{अम}^२ + \text{मक}^२}$ मिळतो.

कर्ण **बड** काढण्यासाठीं :

$\triangle$ **बडफ** यांत **फब** लंब व **फड** = **अड** + **अफ** = **अड** + **बम** हे ठाऊक आहेत.

$\therefore$ कर्ण **बड** $= \sqrt{\text{फड}^२ + \text{फब}^२}$.

उदाहरण

एक विषमभुज चौकोन.

श्लोक १८३, १८४

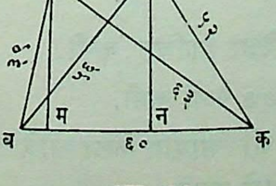
द्विपंचाशन्मितव्येकचत्वारिंशन्मितौ भुजौ ।
मुखं तु पंचविंशत्या तुल्यं षष्टचा मही किल ॥१८३॥

अतुल्यलंबकक्षेत्रमिदं पूर्वैरुदाहृतम् ।
षट्पंचाशत्रिषष्टिश्च नियते कर्णयोर्मिती ।
कर्णौ तत्रापरौ ब्रूहि समलंबे च तच्छ्रुती ॥१८४॥

अर्थ : एका बिषमभुज चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू ३९ व ५२ आहेत. मुख २५ व पाया ६० आहे. यांत लंब समान नाहींत. चौकोनाचे कर्ण ५६ व ६३ आहेत. तर हेच विषमभुज घेऊन, पण कर्ण निराळे घेऊन, दुसरा चौकोन बनवून दाखीव व हीच आकृति समलंब असल्यास कर्ण काय ?

हें उदाहरण पूर्वाचार्यांनीं सांगितलेंच आहे.

स्पष्टीकरण : शेजारच्या विषम चौकोनांत भुजा व कर्ण पूर्वाचार्यांनीं दिले आहेत व हा असमलंब चौकोन आहे असें ते म्हणतात. आपण याचे लंब **अम** व **डन** मोजूं.



आ. २५.

त्रिकोण **अबक** यांत बाजू ३९, ६३ व भूमि ६० आहेत.

म्हणून भूखंड सूत्रानें,

$$\text{बम} = \frac{१}{२}\left\{६० - \frac{१०२ \times २४}{६०}\right\} = \frac{१}{२} \times \frac{९६}{५} = \frac{४८}{५}.$$

आणि $\textbf{अम}^{२} = ३९^{२} - \frac{४८^{२}}{२५} = \frac{१९५^{२} - ४८^{२}}{२५} = \frac{२४३ \times १४७}{२५}.$

$\therefore$ **अम** $= \frac{१८९}{२५}.$

तसेंच $\triangle$ **डबक** मध्यें **बन** $= \frac{१}{२}\left\{६० + \frac{१०८ \times ४}{६०}\right\} = \frac{१}{२} \times \frac{३३६}{५} = \frac{१६८}{५}.$

आणि $\textbf{डन}^{२} = ५६^{२} - \frac{१६८^{२}}{२५} = \frac{२८०^{२} - १६८^{२}}{२५} = \frac{४४८ \times ११२}{२५},$

$\therefore$ **डन** $= \frac{११२ \times २}{५} = \frac{२२४}{५}.$ अर्थात् लंब सारखे नाहींत.

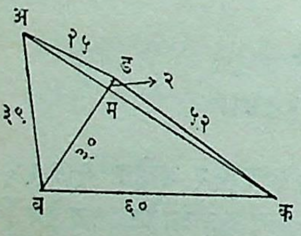
टीप : वाचकांना टालेमीचा सिद्धांत ठाऊक असेल तर वरील चौकोन चक्रीय आहे हें सहज दिसेल. कारण त्याप्रमाणें, कर्णाचा गुणाकार = संमुख बाजूंच्या गुणाकारांची बेरीज.

$\therefore \quad ५६ \times ६३ = (२५ \times ६०) + (३९ \times ५२)$

$३५२८ = १५०० + २०२८,$

हें बरोबर आहे अर्थात् चतुष्कोण वृत्तस्थ म्हणजे चक्रीय आहे.

आता याच चौकोनात एक कर्ण ५६ ऐवजी ३२ घेतला तर दुसरा कर्ण किती ? शेजारच्या आकृतींत चारही बाजूंची लांबी दिली आहे व कर्ण **बड** = ३२ घेतला.



आ. २६.

आपणांस **अक** कर्ण काढणें आहे. त्रिकोण **अबड** मध्यें भूखंडें **बम**, **मड** काढू व लंब **अम** काढू. भूखंड सूत्रानें,

बम $= \frac{१}{२}\left\{३२ + \frac{६४ \times १४}{३२}\right\} = \frac{१}{२}\{३२ + २८\} = ३०.$

तसेंच $\textbf{अम}^{२} = ३९^{२} - ३०^{२} = १५२१ - ९०० = ६२१.$

$\therefore$ **अम** = २५ ला किंचित् कमी.

तसेंच **बकड** त्रिकोणांत जर खंडें **बन**, **नड** व लंब **कन** घेतला,

तर **बन** $= \frac{१}{२}\left\{३२ + \frac{११२ \times ८}{३२}\right\} = \frac{१}{२}\{३२ + २८\} = ३०.$

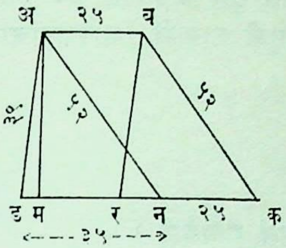
याचाच अर्थ हा कीं **अमक** ही सरळ रेषा होऊन ती **बड** रेषेशी लंब झाली. म्हणजे या चौकोनाचे कर्ण परस्परांस लंब झाले. बऱ्याच लीलावती लेखकांनीं ही गोष्ट नमूद केली नाहीं. अर्थात् आतां **मक** मिळविणें सोपें झालें.

$\textbf{मक}^{२} = ६०^{२} - ३०^{२} = २७००$ $\therefore$ **मक** = ५२ पेक्षां किंचित् कमी.

$\therefore$ कर्ण **अक** = २५+५२ पेक्षां किंचित कमी = ७७ पेक्षां कमी.

या ठिकाणीं जुन्या लेखकांनीं वर्गमूळ काढण्याचा जो आयोग केला आहे त्याऐवजी तारतम्यानें करणीगत मूल्यें घेतली असतीं तर ठीक झाले असतें.

आतां तिसरें उदाहरण पहा. यांत बाजू त्याच ठेवून आकृति समलंब चौकोन केली तर कर्ण व क्षेत्रफळ काढणें.



आ. २७.

समजा **अबकड** समलंब आहे.

नक $=$ २५ करा, म्हणजे **डन** $=$ ३५ होईल.

$\triangle$**अडन** मध्यें भूखंड सूत्रानें,

$$\text{डम} = \frac{१}{२}\left\{३५ - \frac{९१ \times १३}{३५}\right\} = \frac{१}{२}\left\{३५ - \frac{१६९}{५}\right\}$$

$$= \frac{१}{२} \times \frac{६}{५} = \frac{३}{५}.$$

$$\text{आणि } \text{अम}^२ = ३९^२ - \frac{९}{२५} = \frac{१९५^२ - ९}{२५}$$

$$= \frac{३८०२५ - ९}{२५} = \frac{३८०१६}{२५}. \qquad \therefore \ \text{अम} = \frac{१}{५}\sqrt{३८०१६}.$$

$$\text{आता } \text{मक} = ६० - \frac{३}{५} = \frac{२९७}{५}.$$

$$\therefore \ \text{कर्ण } \text{अक}^२ = \frac{२९७^२}{२५} + \frac{३८०१६}{२५} = \frac{८८२०९}{२५} + \frac{३८०१६}{२५} = \frac{१२६२२५}{२५}.$$

$\therefore$ **अक**^{२} $=$ ५०४९ आणि ५०४१ चें वर्गमूळ ७१ आहे.

$\therefore$ **अक** $=$ ७१ $+$ किंचित् अंश.

बड कर्ण साध्य करण्यास खालील समीकरण घ्यावें.

$$\text{बड}^२ = \left(२५ + \frac{३}{५}\right)^२ + \text{अम}^२ = \frac{१२८^२}{२५} + \frac{३८०१६}{२५}$$

$$= \frac{१६३८४ + ३८०१६}{२५} = \frac{५४४००}{२५} = २१७६.$$

$\therefore$ **बड** $= \sqrt{२१७६}$ $=$ जवळजवळ ४६·७

$$\text{क्षेत्रफळ} = \frac{१}{२}\ (६० + २५) \times \frac{१९५}{२५} = \frac{१}{२} \times ८५ \times \frac{२९}{५} \text{ आसन्न}$$

$$= \frac{१}{२} \times १७ \times २९ = \frac{४९३}{२} \text{ चौरस एकक.}$$

हें उत्तर प्रत्यक्ष क्षेत्रफळाशीं किंचित फरकानें आहे.

हल्लींची आसन्नमान घेण्याची रीत भास्कराचार्यांच्या रीतीपेक्षां थोडी निराळी आहे.

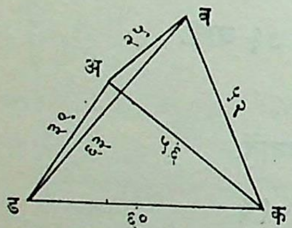
सूत्र : हें सूत्र ब्रह्मगुप्तानें आपल्या स्फुटसिद्धांतांत दिलें आहे. त्यांत विषम **चौकोन** चक्रीय असल्यास आणि चार बाजू दिल्यास कर्णांची लांबी काढतां येते असें दाखविलें आहे. आनंदाची गोष्ट ही कीं ब्रह्मगुप्तास सहाव्या शतकांत हें सूत्र सांपडलें, पण पाश्चात्त्यांना तें शोधून काढण्यास सोळाव्या शतकापर्यंत वाट पहावी लागली. भास्कराचार्यांनें या शोधाबद्दल ब्रह्मगुप्ताची फार स्तुति केली आहे.

श्लोक १८५

> **कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत् ।**
> **योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥१८५॥**

अर्थ : कोठल्याही चक्रीय चौकोनांत जर भुज दिलेले असतील तर कर्ण काढण्यास, कर्णाश्रित म्हणजे कर्णाच्या टोंकांतून जे भुज जातात त्यांच्या गुणाकारांची बेरीज करा. परस्पर संमुख अशा भुजांच्या गुणाकारांची बेरीज करा. तसेंच कर्णाच्या दोन्ही बाजूस असलेल्या भुजांच्या गुणाकारांची बेरीज करा. नंतर परस्परसंमुखांच्या गुणाकारास कर्णाच्या बाजूस असलेल्या भुजवधैक्यानें गुणा व कर्णाश्रितांच्या गुणाकारानें भागा व फलाचें वर्गमूळ घ्या म्हणजे कर्णाची लांबी मिळेल.

समजुतीसाठीं प्रथम उदाहरण घेऊं व नंतर सूत्रसिद्धि देऊं.



आ. २८.

अबकड हा चक्रीय चौकोन असून त्याच्या बाजू आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें अनुक्रमें २५, ५२, ६०, ३९ आहेत. तर कर्ण **अक**, **बड** यांच्या लांब्या काढा.

येथे कर्णाश्रित भुजवधांची बेरीज

$= \text{२५} \times \text{३९} + \text{५२} \times \text{६०}$

$= \text{९७५} + \text{३१२०} = \text{४०९५}.$

संमुख भुजवधांची बेरीज $= (\text{२५} \times \text{६०}) + (\text{३९} \times \text{५२}) = \text{१५००} + \text{२०२८} = \text{३५२८}$

कर्णाच्या उभय बाजूंना असलेल्या भुजांच्या गुणाकाराची बेरीज

$= \text{२५} \times \text{५२} + \text{३९} \times \text{६०} = \text{१३००} + \text{२३४०} = \text{३६४०}.$

$$\therefore (\text{कर्ण अक})^2 = \frac{\text{३५२८} \times \text{३६४०}}{\text{४०९५}} = \frac{\text{१२८४१९२०}}{\text{४०९५}}$$

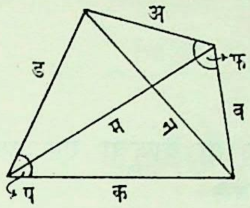
$$\therefore \text{अक}^2 = \text{३१३६}. \quad \therefore \text{अक} = \sqrt{\text{३१३६}} = \text{५६}.$$

$$(\text{कर्ण बड})^2 = \frac{\text{३५२८} \times \text{४०९५}}{\text{३६४०}} = \frac{\text{१४४४७१६०}}{\text{३६४०}} = \text{३९६९}.$$

$$\therefore \text{बड}^2 = \text{३९६९} \quad \therefore \text{बड} = \text{६३}$$

स्पष्टीकरण : श्लोक १६४ मध्यें कोठल्याही चौकोनाचें क्षेत्रफळ काढतांना जीं समीकरणे वापरलीं आहेत तीं घेऊं.

शेजारील आकृतींत **अ, ब, क, ड** या बाजूंच्या लांब्या समजूं, **न** हा कर्ण धरूं आणि कर्णसंमुख कोन **प, फ** समजूं. चौकोन चक्रीय असल्यानें $\angle$प $+ \angle$फ $= १८०°$. $\therefore$ कोज्या(प) + कोज्या(फ) = ०.



आ. २९.

आतां कोज्या (प) $= \dfrac{क^2 + ड^2 - न^2}{२डक}$.

कोज्या (फ) $= \dfrac{अ^2 + ब^2 - न^2}{२अब}$.

वेरीज करून, $\dfrac{क^2 + ड^2 - न^2}{२कड} + \dfrac{अ^2 + ब^2 - न^2}{२अब} = ०$

$\therefore$ $(क^2 + ड^2)$ अब $+ (अ^2 + ब^2)$ कड $= न^2$ (अब + कड)

$\therefore$ $न^2 = \dfrac{अबड^2 + अ^2कड + अबक^2 + ब^2कड}{अब + कड} = \dfrac{(अड + बक)(बड + अक)}{अब + कड}$.

याच नियमानुसार दुसरा कर्ण **म** खालील सूत्रानें मिळेल.

$म^2 = \dfrac{(अड + बक)(अब + कड)}{अड + बक}$. म्हणून ब्रह्मगुप्ताचें सूत्र सिद्ध झालें.

रीत : भास्कराचार्यांची.

श्लोक १८५

अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः । परस्परं कर्णहता भुजा इति ॥
चतुर्भुजं यद्विषमं प्रकल्पितं । श्रुती तु तत्र त्रिभुजद्वयात्ततः ॥१८५॥

अर्थ : (या ठिकाणीं भास्कराचार्य स्वतःची सोपी अशी रीत देतात.)
दोन काटकोन त्रिकोण असे घ्यावे कीं ज्यांच्या बाजू पूर्णांक आहेत. एकाच्या कर्णानें दुसऱ्याच्या भुजांस गुणावें व दुसऱ्याच्या कर्णानें पहिल्याच्या भुजांस गुणावें. असा विषम चतुर्भुज तयार झाला कीं मूळ जात्य त्रिकोणांच्या भुजांच्या गुणाकारांत कोटींचा गुणाकार मिळविला कीं एक कर्ण व परस्पर कोटिभुज गुणाकारांची वेरीज हा दुसरा कर्ण. ही रीत १८६ श्लोकांत पुढें दिली आहे.

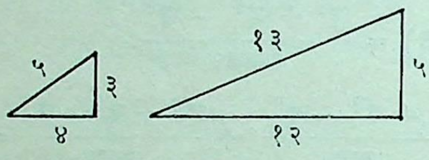
श्लोक १८६

बाह्वोर्वधः कोटिवधेन युक्स्यात् । एका श्रुतिः कोटिभुजावधैक्यम् ॥
अन्या लघौ सत्यपि साधनेऽस्मिन् । पूर्वैः कृतं यद्गुरु तन्न विद्मः ॥१८६॥

स्पष्टीकरण : भास्कराचार्य म्हणतात कीं कर्ण मिळविण्याची ब्रह्मगुप्त वगैरे पूर्वाचार्यांची रीत फारच लांबलचक आहे. माझी रीत त्यामानानें सोपी व छोटी आहे. भास्कराचार्यांचा आक्षेप असा आहे कीं अशी सोपी रीत असतांना जुने गणितज्ञ हा दीर्घसूत्रीपणा कां करीत होते ? त्यांना ही सोपी रीत सांपडणें शक्य होतें.

उदाहरण

समजा, आपण ३, ४, ५ बाजूंचा एक आणि ५, १२, १३ या बाजूंचा एक असे दोन जात्य त्रिकोण घेतले,



आ. ३०.

तर विषम चतुर्भुजाचे बाहू १३ × ४, १३ × ३ हे संमुख व ५ × ५, ५ × १२ हे संमुख. यांच्या योगानें श्लोक १८५ मधला विषम चतुर्भुज तयार झाला.

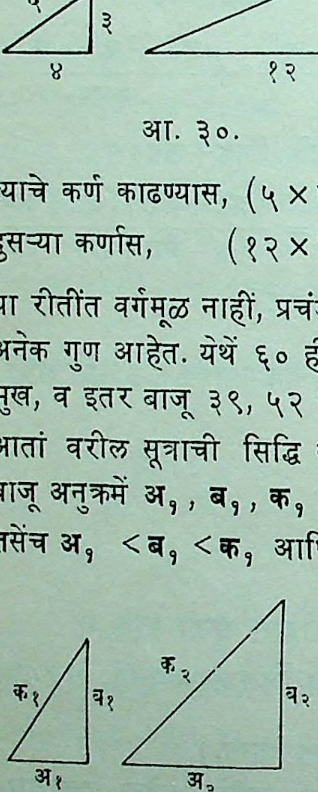
त्याचे कर्ण काढण्यास, (५ × ३) + (१२ × ४) = ६३ ही बेरीज घ्या.

दुसऱ्या कर्णास, (१२ × ३) + (४ × ५) = ५६ ही बेरीज घ्या.

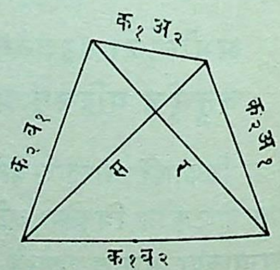
या रीतींत वर्गमूळ नाहीं, प्रचंड गुणाकार नाहींत, घोटाळा होण्याचा संभव नाहीं; असे अनेक गुण आहेत. येथें ६० ही सर्वांत मोठी बाजू भूमि, २५ ही सर्वांत लहान बाजू मुख, व इतर बाजू ३९, ५२ या त्याच्या भुजा होत.

आतां वरील सूत्राची सिद्धि करूं. आकृति ३१ पाहा. समजा दोन जात्य त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमें $अ_1$, $ब_1$, $क_1$ आणि $अ_2$, $ब_2$, $क_2$ आहेत.

तसेंच $अ_1 < ब_1 < क_1$ आणि $अ_2 < ब_2 < क_2$ आहेत, असें समजा.



आ. ३१.



आ. ३२.

तर भास्कराचार्यांच्या नियमाप्रमाणें, आकृति ३२ मधील वृत्तस्थ चौकानाच्या बाजू $क_1 अ_2$, $क_2 अ_1$, $क_1 ब_2$ आणि $क_2 ब_1$ या झाल्या. यांतील $क_1 अ_2$, $क_1 ब_2$ या संमुख व इतर दोन संमुख झाल्या. यांना ब्रह्मगुप्ताचें सूत्र लावलें म्हणजे कर्ण **स** ची किंमत

$$स^2 = \frac{\{क_1^2 अ_2 ब_2 + क_2^2 अ_1 ब_1\}\{क_1 क_2 अ_1 अ_2 + क_1 क_2 ब_1 ब_2\}}{क_1 क_2 अ_1 ब_2 + क_1 क_2 अ_2 ब_1}$$

$$\therefore \; स^2 = \frac{\{क_1^2 अ_2 ब_2 + क_2^2 अ_1 ब_1\} \times क_1 क_2 (अ_1 अ_2 + ब_1 ब_2)}{क_1 क_2 (अ_1 ब_2 + अ_2 ब_1)}$$

यांत अंश, छेदांतला सामान्य अवयव काढून टाकून आणि

$\text{अ}_{१}^{२}+\text{ब}_{१}^{२}=\text{क}_{१}^{२}$ व $\text{अ}_{२}^{२}+\text{ब}_{२}^{२}=\text{क}_{२}^{२}$ याचा उपयोग करून

$$\therefore \quad \text{स}^{२} = \frac{\{\text{अ}_{२}\text{ब}_{२}(\text{अ}_{१}^{२}+\text{ब}_{१}^{२})+\text{अ}_{१}\text{ब}_{१}(\text{अ}_{२}^{२}+\text{ब}_{२}^{२})\}\{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\}}{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}}$$

$$\therefore \quad \text{स}^{२} = \frac{\{\text{अ}_{१}^{२}\text{अ}_{२}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}^{२}\text{ब}_{१}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{२}\text{ब}_{१}^{२}+\text{अ}_{१}\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}^{२}\}\{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\}}{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}}$$

$$= \frac{\{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\}\{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}\}\{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\}}{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}}$$

$$= (\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२})^{२}$$

$\therefore \quad \text{स} = \text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}$ = भुजगुणाकार + कोटिगुणाकार.

याचप्रमाणें दुसरा कर्ण र असल्यास

$$\text{र}^{२} = \frac{\{\text{क}_{१}^{२}\text{अ}_{२}\text{ब}_{२}+\text{क}_{२}^{२}\text{अ}_{१}\text{ब}_{१}\}\{\text{क}_{१}\text{क}_{२}(\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१})\}}{(\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२})\text{क}_{१}\text{क}_{२}}$$

$$= \frac{\{\text{अ}_{२}\text{ब}_{२}(\text{अ}_{१}^{२}+\text{ब}_{१}^{२})+\text{अ}_{१}\text{ब}_{१}(\text{अ}_{२}^{२}+\text{ब}_{२}^{२})\}\{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}\}}{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}}$$

$$= \frac{\{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}\}\{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\}\{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}\}}{\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}+\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}}$$

$$= \{\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}\}^{२}. \quad \therefore \quad \text{र}=\text{अ}_{१}\text{ब}_{२}+\text{अ}_{२}\text{ब}_{१}.$$

$\therefore$ र = (पहिल्याचा भुज × दुसऱ्याची कोटि) + (पहिल्याची कोटि × दुसऱ्याचा भुज).

अर्थात् सूत्र सिद्ध झालें.

उदाहरण

श्लोक १८६

क्षेत्रे यत शतत्रयं क्षितिमितिस्तत्त्वेंदुतुल्यं मुखम् ।
बाहू खोत्कृतिभिः शरातिधृतिभिस्तुल्यौ च तत्र श्रुती ।।
एका खाष्टयमैः समा तिथिगुणैरन्याथ तल्लंबकौ ।
तुल्यौ गोधृतिभिस्तथाजिनयमै योगाच्छ्रुवोर्लम्बयोः ।।१८६।।

श्लोक १८७

तत्खंडे कथयाधरे श्रवणयोर्योगाच्च लम्बावधे ।
तत्सूची निजमार्गवृद्धभुजयोर्यौगाद्यथा स्यात्तथा ।।
साबाधं वद लंबकं च भुजयोः सूच्याः प्रमाणे च के ।
सर्वं गाणितिक प्रचक्ष्व नितरां क्षेत्रे ऽत्र दक्षो ऽसि चेत् ।।१८७।।

अर्थ : एका विषमभुज चौकोनांत (चक्रीय) पाया ३००, मुख १२५, इतर बाजू, उजवीकडील २६०, डावीकडील १९५, एक कर्ण २८०, दुसरा ३१५ असे आहेत. तसेच लहान लंब १८९ व दुसरा लंब २२४ आहे तर या आकृतींत पुढें दिलेलीं मानें सांग.

(१) कर्ण व लंब यांच्या छेदनबिंदूपासून पायापर्यंत होणारे कर्णखंड व लंबखंड यांची दोन्ही बाजूंचीं मानें सांग.

(२) कर्णांच्या छेदनबिंदूची उंची व आबाधा (पायाचे छेद) सांग.

(३) चौकोनाचे तिरपे भुज वाढवून जेथें मिळतात त्या बिंदूची (सूचि) उंची व त्यानें केलेले पायाचे खंड सांग.

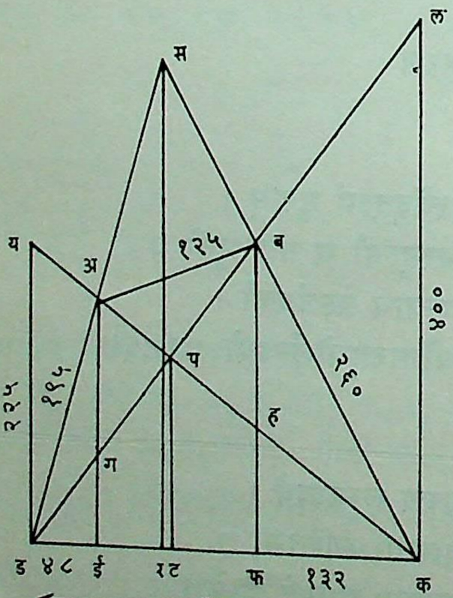
(४) तसेच सूचीचे बृहद्भुजही सांग.

हे गणितज्ञा, जर तूं भूमितीत तरबेज आणि दक्ष असशील, तर या सर्व गोष्टी सांग.

टीप : यांतल्या अनेक संख्या "अंकानां वामतो गतिः" या पद्धतीनें लिहिल्या आहेत:

तत्त्वेंदु = १२५, (इंदु किंवा चंद्र = १, तत्त्व = २५)
खोत्कृति = २६०, (ख = ०, उत्कृति = २६ अक्षरीं वृत्त).
शरातिधृति = १९५, (शर = ५, अतिधृति = १९ अक्षरीं छंद)
खाष्टयम = २८०, (ख = ०, अष्ट = ८, यम = २)
तिथिगुण = ३१५, (गुण = ३, तिथि = १५).
गोधृति = १८९, (गो = ९, धृति = १८ अक्षरीं छंद),
जिनयम = २२४, (जिन = २४ तीर्थंकर, यम = २).

स्पष्टीकरण : प्रथम हे उदाहरण भास्करीय सूत्रें व समरूप त्रिकोण यांचा उपयोग करून, कमींत कमी गणित करून, (आकृति ३३ पाहा) सोडवू.



आकृति ३३.

प्रश्नांत दिलेलीं मानें.

डक = ३००	**अक** = ३१५
अब = १२५	**बड** = २८०
बक = २६०	**अई** = १८९
अड = १९५	**बफ** = २२४

वाचकांच्या लक्षांत येईल कीं चौकोन चक्रीय असल्यानें पहिली चार मापें दिलीं कीं, पुढलीं चार द्यावयाची गरज नाहीं. तीं मोजतां येतात.

△ **अकड** मध्ये **अड** = १९५, **अई** = १८९

∴ **डई**^{2} = १९५^2 − १८९^2

= ३८४ × ६ = २३०४.

∴ **डई** = ४८.

∴ **कई** = ३०० − ४८ = २५२.

तसेंच फक^२ = बक^२ − बफ^२ = २६०^२ − २२४^२ = ४८४ × ३६

∴ फक = २२ × ६ = १३२. ∴ डफ = १६८, ईफ = १२०.

आता △ कईअ आणि △ कडय समरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{कई}}{\text{अई}} = \frac{\text{डक}}{\text{डय}} \text{ किंवा } \frac{२५२}{१८९} = \frac{३००}{\text{डय}} \quad \therefore \text{डय} = \frac{३०० \times १८९}{२५२} = २२५$$

याच पद्धतीनें △ डबफ व △ डकल समरूप आहेत, म्हणून

$$\frac{\text{डफ}}{\text{बफ}} = \frac{\text{डक}}{\text{कल}} \text{ किंवा } \frac{१६८}{२२४} = \frac{३००}{\text{कल}} \quad \therefore \text{ कल} = ४००.$$

तसेंच △ अडई, △ सडर, यांत डर, रस अव्यक्त आहेत, व त्रिकोण समरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{सर}}{\text{डर}} = \frac{\text{अई}}{\text{डई}} = \frac{१८९}{४८} = \frac{६३}{१६}$$

त्याचप्रमाणें △ बफक, △ सरक, समरूप आहेत. आणि रक = ३०० − डर.

$$\therefore \frac{\text{सर}}{३०० - \text{डर}} = \frac{२२४}{१३२}. \text{ अर्थात् } १६ \text{ सर} = ६३ \text{ डर} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{आणि } ३३ \text{ सर} = ५६ \,(३०० - \text{डर}) \quad \ldots\ldots\ldots (२)$$

∴ ५२८ सर = २०७९ डर आणि ५२८ सर = ८९६ (३०० − डर).

अर्थात २९७५ डर = ८९६ × ३००.

$$\therefore \text{ डर} = \frac{१५३६}{१७} = ९०\frac{६}{१७}, \text{ आणि ईर} = ४२\frac{६}{१७} = \frac{७२०}{१७}.$$

$$\text{आतां सर} = \frac{६३}{१६} \text{ डर} = \frac{६३}{१६} \times \frac{१५३६}{१७} = \frac{६०४८}{१७}.$$

$$\text{रक} = ३०० - \text{डर} = ३०० - \frac{१५३६}{१७} = \frac{५१०० - १५३६}{१७} = \frac{३५६४}{१७}.$$

आतां △ डईग व △ डकल समरूप. दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूंचें प्रमाण ३ : ४ : ५.

$$\therefore \text{ गई} = \frac{४}{३} \times ४८ = ६४ \text{ आणि गड} = \frac{५}{३} \times ४८ = ८०.$$

तसेंच △ कफह व △ कडय समरूप. ∴ कफह त्रिकोणांत बाजूंचें प्रमाण ४ : ३ : ५.

$$\therefore \text{ हफ} = \frac{३}{४} \times १३२ = ९९ \text{ आणि हक} = \frac{५}{४} \times १३२ = १६५.$$

$$\text{आकृति ३३ मध्यें डफ} = १६८, \text{ डर} = ९०\frac{६}{१७}, \qquad \therefore \text{ रफ} = ७७\frac{११}{१७}.$$

आतां अस, बस काढूं. △ सडर, अडई समरूप.

$$\therefore \frac{\text{सअ}}{\text{अड}} = \frac{\text{ईर}}{\text{डई}} = \frac{७२०}{१७ \times ४८} = \frac{१५}{१७}. \quad \therefore \text{ सअ} = \frac{१९५ \times १५}{१७}$$

आणि **सड** $= १९५ + \frac{१९५ \times १५}{१७} = १९५ \times \frac{३२}{१७} = \frac{६२४०}{१७}$.

याच पद्धतीनें $\frac{\textbf{सब}}{\textbf{बक}} = \frac{\textbf{रफ}}{\textbf{फक}}$ $\therefore$ $\frac{\textbf{सब}}{२६०} = \frac{१३२०}{१७} \times \frac{१}{१३२} = \frac{१०}{१७}$.

$\therefore$ **सब** $= \frac{२६००}{१७}$ आणि **सक** $= २६० + \frac{२६००}{१७} = \frac{२६० \times २७}{१७} = \frac{७०२०}{१७}$.

आतां फक्त **डट**, **टक**, **पट** काढावयाचे राहिले.

भास्करीय सूत्रानें, **पट** $= \frac{२२५ \times ४००}{२२५ + ४००} = \frac{२२५ \times ४००}{६२५} = \frac{९ \times १६}{१} = १४४$.

डट $\times \frac{२२५}{६२५} \times ३०० = १०८$ आणि **टक** $= ३०० - १०८ = १९२$.

भास्कराचार्यांनें हें प्रचंड उदाहरण सोडविण्यासाठीं काय सांगितलें आहे, तें आतां पाहूं.

श्लोक १८८, १८९

लंबतदाश्रितबाह्वोर्मध्यं संध्याख्यमस्य लंबस्य ।
संध्यूना भूः पीठं साध्यं यस्याधरं खंडम् ॥१८८॥
तत्संधिद्विष्ठः परलंबश्रवणाहतो ऽन्यपीठेन ।
भक्तो लंबश्रुत्योर्योगात्स्यातामधः खंडे ॥१८९॥

अर्थ : लंब व त्यावर टेकलेली भुजा, आकृति ३३ मध्ये (**अई** व **अड**) तसेंच (**बफ**, **बक**) यांमध्यें सांपडलेला भूमिभाग यास संधि म्हणतात; (**डई** व **फक**). पायांतून संधि वजा देऊन जे खंड राहतात त्यांना 'पीठ' असें म्हणतात; (**डई** चें पीठ **ईक** आणि **फक** चें पीठ **डफ**). ज्या लंबाचें व तदाश्रित कर्णाचें अधःखंड पाहिजे असेल त्याच्या संधीस परलंबानें गुणावें व परपीठानें भागावें म्हणजे लंबखंड मिळतो; (**गई**). तसेंच संधीस परकर्णानें गुणून परपीठानें भागावें म्हणजे कर्णखंड मिळतो. असेंच दुसऱ्या लंबाबद्दल समजावें.

समरूप त्रिकोण घेऊन हेंच दाखवितां येईल.

कारण △ **गईड** हा △ **बफड** याच्याशीं समरूप. $\therefore$ $\frac{\textbf{गई}}{\textbf{डई}} = \frac{\textbf{बफ}}{\textbf{डफ}}$.

$\therefore$ **गई** $= \frac{\textbf{डई} \times \textbf{बफ}}{\textbf{डफ}} = \frac{\text{संधि} \times \text{अन्यलंब}}{\text{अन्यपीठ}}$.

तसेंच $\frac{\textbf{गड}}{\textbf{डई}} = \frac{\textbf{बड}}{\textbf{बफ}}$. $\therefore$ **गड** $= \frac{\textbf{डई} \times \textbf{बड}}{\textbf{बफ}} = \frac{\text{संधि} \times \text{अन्यकर्ण}}{\text{अन्यपीठ}}$.

वर आम्ही दिलेल्या सिद्धतेंत △ **गडई** याची तुलना △ **लडक** याच्याशीं केली आहे.

श्लोक १९०

लंबौ भूघ्नौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ।
ताभ्यां प्राग्वत् श्रुत्योर्योगाल्लंबः कुखंडे च ॥१९०॥

अर्थ : आकृति ३३ मधील रेषा **यड** व **लक** यांना वंश (बांबू) म्हणतात. या रेषा भूमीस लंब असून त्यांचीं वरचीं टोकें कर्णांवर स्थित असतात. वंशाची लांबी काढण्यासाठी लंब व भूमि यांच्या गुणाकारास आपल्याच पीठानें भागावें. तसेंच वंशांची लांबी मिळाली म्हणजे श्लोक १५६ मधील 'अन्योन्याग्रमूल' सूत्रानें योगबिंदूची उंची (**पट**) व भूखंडें **डट, कट** मिळतील.

स्पष्टीकरण : △ **अईक** आणि △ **यडक** समरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{यड}}{\text{डक}} = \frac{\text{अई}}{\text{ईक}}, \quad \therefore \text{ यड} = \frac{\text{डक} \times \text{अई}}{\text{ईक}} = \frac{\text{भूमि} \times \text{लंब}}{\text{पीठ}}$$ हे सूत्र सिद्ध.

वरच्या उदाहरणांत आम्ही याचाच अवलंब केला आहे. वंशांची लांबी मिळाल्यावर 'अन्योन्याग्रमूल' सूत्राने **पट, डट, कट** काढले आहेत.

श्लोक १९१, १९२, १९३

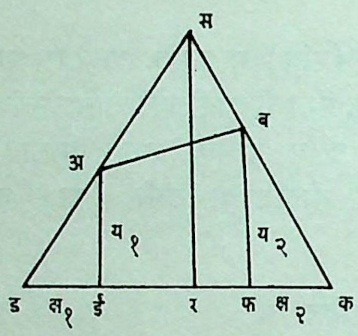
लंबहृतो निजसंधिः परलंबगुणः समाह्वयो ज्ञेयः ।
समपरसन्ध्योरैक्यं हारस्तेनोद्धृतौ तौ च ॥ १९१ ॥
समपरसन्धी भूघ्नौ सूच्याबाधे पृथक् स्याताम् ।
हारहृतः परलंबः सूचीलंबो भवेद्भूघ्नः ॥ १९२ ॥
सूचीलंबघ्नभुजौ निजनिजलंबोद्धृतौ भुजौ सूच्याः ।
एवं क्षेत्रक्षोदः प्राज्ञैस्त्रैराशिकात् क्रियते ॥ १९३ ॥

अर्थ : संधीस त्याच्याच लंबानें भागून परलंबानें (दुसऱ्या बाजूच्या लंबाने) गुणावें. अशा गुणाकारास 'सम' म्हणतात. या समांत परसंधि मिळवून येणाऱ्या रकमेस 'हार' म्हणतात. नंतर सम व परसंधि यांना पृथक्पणें भूमीनें गुणून हारानें भागिलें म्हणजे सूचिलंबाच्या दोन्ही बाजूंच्या आबाधा येतात.

परलंबास हारान भागून भूमीनें गुणल्यास सूचीलंब मिळतो. सूचीलंबानें चौकोनाच्या दोन्ही बाजूस पृथक्पणें गुणून आपापल्या लंबाने भागल्यास सूचीपर्यन्त वाढविलेल्या भुजांच्या लांब्या मिळतात.

आकृतीच्या सर्व परिमाणांचा निर्णय (क्षोद) शहाणे लोक याप्रमाणें त्रैराशिकावरून करतात.

स्पष्टीकरण : सूचिलंबाच्या आबाधा काढतांना १८७ श्लोकाच्या स्पष्टीकरणांत आम्ही जीं दोन (द्विवर्ण प्रथमघातीं) समीकरणें दिलीं आहेत तींच भास्कराचार्यानें निराळ्या स्वरूपांत सांगितली आहेत.



आ. ३४

समजा डई = $\text{संधि}_१$, **कफ** = $\text{संधि}_२$

अई = $\text{लंब}_१$, **बफ** = $\text{लंब}_२$.

आपण डई = $\text{क्ष}_१$, **कफ** = $\text{क्ष}_२$, **अई** = $\text{य}_१$, **बफ** = $\text{य}_२$ समजूं. तसेंच **सर** = **य**, **डर** = **क्ष** आणि भू = **डक** पाया धरूं.

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{य}_१}{\text{क्ष}_१} \text{ आणि } \frac{\text{य}}{\text{भू} - \text{क्ष}} = \frac{\text{य}_२}{\text{क्ष}_२} \ldots\ldots (१)$$

$$\therefore \frac{\text{भू} - \text{क्ष}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{य}_१ \text{क्ष}_२}{\text{य}_२ \text{क्ष}_१}.$$ दोन्ही बाजूंना १ मिळवून $$\frac{\text{भू}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{य}_१ \text{क्ष}_२ + \text{य}_२ \text{क्ष}_१}{\text{य}_२ \text{क्ष}_१}.$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{भू} \times \text{य}_२ \text{क्ष}_१}{\text{य}_२ \text{क्ष}_१ + \text{य}_१ \text{क्ष}_२}.$$ अर्थात् $$\text{क्ष} = \frac{\text{भू} \times \left(\frac{\text{क्ष}_१}{\text{य}_१} \times \text{य}_२\right)}{\left(\text{य}_२ \times \frac{\text{क्ष}_१}{\text{य}_१} + \text{क्ष}_२\right)}.$$

येथें भास्कराचार्याच्या व्याख्येप्रमाणें $\frac{\text{क्ष}_१}{\text{य}_१} \times \text{य}_२$ हा सम; तसेंच $\frac{\text{क्ष}_१}{\text{य}_१} \times \text{य}_२ + \text{क्ष}_२$ हा हार. म्हणून सूत्राचा प्रथमार्ध सिद्ध झाला.

याच सूत्रांत नीचगुणक १,२ यांची अदलाबदल केल्यास, दुसरी आबाधा **क्ष′** येईल.

$$\therefore \text{क्ष}' = \frac{\text{भू} \times \text{य}_१ \text{क्ष}_२}{\text{य}_१ \text{क्ष}_२ + \text{य}_२ \text{क्ष}_१} = \frac{\text{भू} \times \text{क्ष}_२}{\text{क्ष}_२ + \frac{\text{य}_२ \text{क्ष}_१}{\text{य}_१}}$$ म्हणून दुसरा अर्ध सिद्ध झाला.

आतां (१) मध्यें सांगितलेल्या समीकरणांचे व्युत्क्रम एकत्र केल्यास,

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{\text{भू} - \text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{क्ष}_१}{\text{य}_१} + \frac{\text{क्ष}_२}{\text{य}_२} = \frac{\text{क्ष}_१ \text{य}_२ + \text{क्ष}_२ \text{य}_१}{\text{य}_१ \text{य}_२}. \quad \therefore \frac{\text{भू}}{\text{य}} = \frac{\text{क्ष}_१ \text{य}_२ + \text{क्ष}_२ \text{य}_१}{\text{य}_१ \text{य}_२}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{भू} \text{य}_१ \text{य}_२}{\text{क्ष}_१ \text{य}_२ + \text{क्ष}_२ \text{य}_१}.$$ अर्थात $$\text{य} = \frac{\text{भू} \times \text{य}_२}{\text{क्ष}_२ + \frac{\text{य}_२ \text{क्ष}_१}{\text{य}_१}} = \frac{\text{भू} \times \text{परलंब}}{\text{हार}}$$ हेंही सिद्ध.

आता फक्त **सड, सक** काढावयाचे आणि ते खालील गुणोत्तरानें मिळतात.

$$\frac{\text{सड}}{\text{अड}} = \frac{\text{सर}}{\text{अई}} . \quad \therefore \text{सड} = \frac{\text{सर} \times \text{अड}}{\text{अई}} . \quad \therefore \text{सूचिभुज} = \frac{\text{सूचिलंब} \times \text{भुज}}{\text{त्या भुजाचा लंब}} .$$

हेंच सूत्र दोन्ही बाजूंस लावलें कीं दोन्ही सूचिभुज मिळतात.

सूत्र : वर्तुळाचा व्यास दिल्यास परिघ काढणें.

श्लोक १९४

व्यासे भनंदाग्नि हते विभक्ते । खबाणसूर्यैः परिधिस्तु सूक्ष्मः ॥
द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथ शैलैः ।
स्थूलोऽथवा स्याद्व्यवहारयोग्यः ॥ १९४ ॥

अर्थ : (कांहीं शब्दांचे अर्थ; भ = २७ (नक्षत्रें); नंद = ९; अग्नि = ३; बाण = ५; सूर्य = १२.)
दिलेल्या व्यासास ३९२७ नें गुणून १२५० नें भागावें म्हणजे सूक्ष्म परिघ मिळतो. तसेंच व्यासास २२ नें गुणून ७ नें भागलें असतां स्थूल परिधि मिळतो.

स्पष्टीकरण : परिधि ÷ व्यास या गुणोत्तराची किंमत अगदीं अचूक अशी मिळूंच शकत नाहीं.

आधुनिक गणितांत $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ या गुणोत्तरास π(पाय्) हें चिन्ह वापरतात. π ची किंमत $\frac{\text{पूर्णांक}}{\text{पूर्णांक}}$ या स्वरूपांत येऊंच शकत नाहीं म्हणून π अगुणोत्तरीय (irrational) आहे असें म्हणतात. तसेंच π कोठल्याही बैजिक समीकरणाचें मूळ असू शकत नाहीं म्हणून π ही कल्पनातीत (transcendental) संख्या आहे असें म्हणतात. अर्थात् π ची किंमत आसन्न घ्यावी लागते. व्यवहारांत $\pi = \frac{२२}{७}$, किंवा अधिकासन्न हवी असेल तर $\pi = \frac{३९२७}{१२५०} = \frac{३१४१६}{१००००}$ घेतात. दशांशांत π = ३.१४१६ = $\frac{६२८३२}{२००००}$.

उदाहरण

श्लोक १९५

विष्कंभमानं किल सप्त यत्र । तत्र प्रमाणं परिधेः प्रचक्ष्व ॥
द्वाविंशतिर्यत्परिधिप्रमाणं । तद्व्याससंख्या च सखे विचिन्त्य ॥१९५ ॥

अर्थ : ज्या वर्तुळाचा व्यास (विष्कंभ) ७ आहे त्याचा परिघ काय? ज्याचा परिघ २२ आहे त्या वर्तुळाचा व्यास काय?

स्पष्टीकरण : उत्तरें स्थूल हवीं असलीं तर

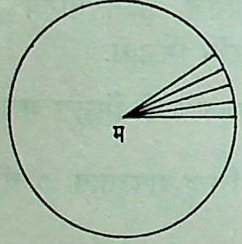
$$\text{परिघ} = ७ \times \frac{२२}{७} = २२, \quad \text{आणि} \quad \text{व्यास} = २२ \times \frac{७}{२२} = ७.$$

पण उत्तरें सूक्ष्म हवीं असलीं तर

$$\text{परिघ} = ७ \times ३.१४१६ = २१.९९१२ \text{ आणि}$$

$$\text{व्यास} = \frac{२२}{३.१४१६} = \frac{२२ \times १२५०}{३९२७} = \frac{२७५००}{३९२७} = ७\frac{११}{३९२७}.$$

या सूत्राची सिद्धि देणें सोपें नाहीं. त्यांत अनेक अडचणी आहेत. किंवहुना चलनकलन शास्त्राचा हा मूलभूत प्रश्न आहे. आपण असें गृहीत धरूं कीं कोन अतिशय लहान असेल व त्याचें अरीय माप (radian measure) १ कले इतकें असेल तर १ कला चापाची (कंसाची) लांबी = त्रिज्या × भुजज्या (१ कला)‡ यांत वर्तुळाची त्रिज्या १ एकक धरली, तर १ कला चापाची लांबी = भुजज्या (१ कला) = .००० २९०९ एकक.



आ. ३५

हे त्रिकोणमितिच्या कोष्टकपत्रिकेवरून मिळतात.
आतां वर्तुळमध्याशीं एकंदर कोन ३६०°,
∴ त्याच्या कला ३६० × ६०.
तसेंच समान चापांची लांबी समान,
∴ ३६० × ६० चापांची लांबी
= २१६०० × .०००२९०९ एकक होईल.
अर्थात् परिघ = ६·२८३४४ आणि व्यास = २ एकक.

$$\therefore \pi = \frac{\text{परिघ}}{\text{व्यास}} = ३.१४१७२ \text{ हें ३ दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर आहे.}$$

सूत्र : वर्तुळाचें क्षेत्रफळ, गोलाचें पृष्ठफळ, व गोलाचें घनफळ काढण्याचीं सूत्रें.

श्लोक १९६

वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं यत् ।
क्षुण्णं वेदैरुपरि परितः कंदुकस्येव जालम् ॥
गोलस्यैवं तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नम् ।
षड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे घनाख्यम् ॥ १९६ ॥

---

‡ पृष्ठ ११० वर ज्या = sine आणि कोज्या = cosine असा उल्लेख आहे. परंतु या पृष्ठांत ज्या–साधनें म्हणजे Determination of chord हा विषय आला असल्यानें आणि ज्या शब्दाला जीवा म्हणजे Chord असाही अर्थ प्रचारांत असल्यानें, केवळ सोयीखातर, येथे sine = भुज-ज्या असे केले आहे. त्या अनुरोधाने, पुढे पृष्ठ १३५ वर चाप-भुज-ज्या $\frac{क्ष}{र} = \text{arc sin} \frac{क्ष}{र} = \sin^{-1} \frac{क्ष}{र}$ असे समजावयाचें.

अर्थ : परिधीनें व्यासास गुणून ४ नें भागलें म्हणजे वर्तुळाचें क्षेत्रफळ येतें.

गोलाच्या गुरुवृत्ताच्या क्षेत्रफळास ४ नें गुणल्यास गोलाचे पृष्ठफळ मिळतें. ज्याप्रमाणें चेंडूच्या सभोंवतीं जाळें असतें त्याप्रमाणें गोलाचा जो पृष्ठभाग असतो त्याचें हें क्षेत्रफळ असतें. गोलाच्या पृष्ठफळास व्यासानें गुणून ६ नें भागलें कीं गोलगर्भाचें घनफळ मिळतें.

स्पष्टीकरण : वर्तुळाची त्रिज्या **र** असेल तर परिधि $२\pi र$, व व्यास **२ र.**

आणि वर्तुळाचे क्षेत्रफळ$=\dfrac{२\pi र \times २र}{४} = \pi र^२$.

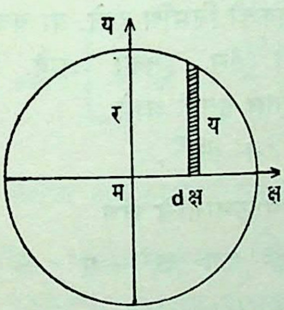
गोल पृष्टफळ $= \pi र^२ \times ४ = ४\pi र^२$. गोल घनफळ $= \dfrac{४\pi र^२ \times २र}{६} = \dfrac{४}{३}\pi र^३$.

या तिन्ही सूत्रांच्या उपपत्ति

सूत्र १ : नवीन रीत : (आकृति ३६ पाहा)

बैज्य भूमिति व चलनकलन शास्त्रांच्या मदतीनें याची उपपत्ति अशी दिली जाते. वर्तुळाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशांक (०, ०) धरून व त्रिज्या **र** धरून वर्तुळाचें समीकरण $क्ष^२ + य^२ = र^२$ होतें. अर्थात् प्रथम चतुर्थकांतील उभ्यापट्टीचें (छायांकित) क्षेत्रफळ **य** dक्ष इतकें झालें.

∴ संकलन करून चतुर्थकाचें (quadrant) क्षेत्रफळ



आ. ३६

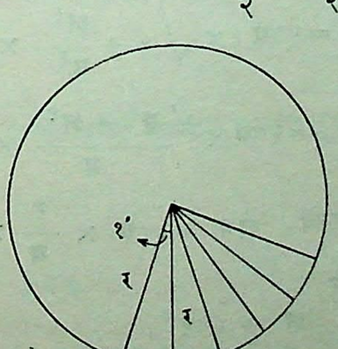
$$= \int_{०}^{र} \sqrt{र^२ - क्ष^२}\, dक्ष$$ इतकें झालें. अर्थात्, $\dfrac{\text{वर्तुळक्षेत्र}}{४}$

$$= \left[\frac{क्ष \times \sqrt{र^२ - क्ष^२}}{२} + \frac{र^२}{२} \times \left(\text{चापभुजज्या } \frac{क्ष}{र}\right) \right]_{०}^{र}$$

∴ $\text{क्षेत्रफळ} = ४ \times \dfrac{र^२}{२} \times \dfrac{\pi}{२} = \pi र^२$. कारण दोन्ही सीमांवर प्रथमपद शून्य आहे, आणि अधःसीमेवर द्वितीयपद शून्य आहे.

जुनी रीत : (आकृति ३७ पहा)

सूत्राची उपपत्ति जुन्या पद्धतीने अशी : जर आपण वर्तुळांत सुसम असा २१६०० बाजूंचा बहुकोन काढला, तर त्याचें क्षेत्रफळ $२१६०० \times \dfrac{१}{२} र^२$ भुजज्या (१') इतकें होईल. $\left[१' = \text{एक कला} = \dfrac{२\pi}{२१६००} \right]$.



आ. ३७

आतां १ कला हा कोन इतका लहान आहे कीं

भुजज्या $(१') = (१') = \frac{२\pi}{२१६००}$ ही किंमत घातली तर बहुकोनाच्या व वर्तुळाच्या क्षेत्रफळांतलें अंतर नगण्य किंमतीचें होईल. याचाच अर्थ बहुकोनाच्या बाजूंची संख्या अनंत प्राय केल्यास बहुकोनफल व वृत्तफल यांतील फरक शून्यवत् होईल.

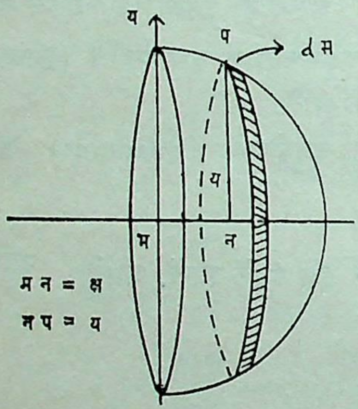
$$\therefore \text{ वृत्तक्षेत्र} = २१६०० \times \frac{\text{र}^२}{२} \times \frac{२\pi}{२१६००} = \pi\text{र}^२.$$

सूत्र २ :

आतां गोलपृष्ठाचें पृष्ठफळ नवीन पद्धतीनें असें येतें. कोठलेंही वर्तुळ व्यासाभोंवतीं फिरविलें म्हणजे गोल निर्माण होतो.

नवीन रीत : (आकृति ३८ पहा)

$\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ = \text{र}^२$ हें वर्तुळ **मन** भोंवतीं फिरविल्यास गोल निर्माण होईल. याचा **म** पासून **क्ष** अंतरावर असलेला लंबच्छेद, तसेंच **क्ष**+d**क्ष** इतक्या अंतरावरचा लंबच्छेद घेतल्यास त्यांच्या दरम्यान एक चकती निर्माण होते. या चकतीचा व्यास २π**य** व रुंदी d**स** इतकी आहे. म्हणून पृष्ठभागाचें क्षेत्र २π**य**d**स** इतकें आहे.



आ. ३८

आता $d\text{स}^२ = d\text{क्ष}^२ + d\text{य}^२$,

∴ एका चकतीच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्र

$२\pi\text{य} \times \sqrt{d\text{क्ष}^२ + d\text{य}^२}$ पण $\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ = \text{र}^२$

.. विकलन करून (by differentiation)

$२\text{क्ष}\, d\text{क्ष} + २\text{य}\, d\text{य} = ०$. (र स्थिर आहे.)

$\therefore \frac{d\text{य}}{d\text{क्ष}} = -\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$. अर्थात् चकतीच्या पृष्टाचें क्षेत्र $= २\pi\text{य} \times \sqrt{१ + \frac{d\text{य}^२}{d\text{क्ष}^२}} \times d\text{क्ष}$

$$= २\pi\text{य} \times \sqrt{१ + \frac{\text{क्ष}^२}{\text{य}^२}} \times d\text{क्ष}.$$

$$= २\pi\text{य} \times \frac{\sqrt{\text{य}^२ + \text{क्ष}^२}}{\text{य}} \times d\text{क्ष}.$$

पण $\text{य}^२ + \text{क्ष}^२ = \text{र}^२$ ∴ चकतीच्या पृष्ठाचें क्षेत्र $= २\pi\text{य} \times \frac{\text{र}}{\text{य}} \times d\text{क्ष}$

संकलन करून अर्धगोलाचें पृष्ठफळ $= २\pi\text{र} \int_०^{\text{र}} d\text{क्ष} = २\pi\text{र}^२$.

अर्थात्, गोलपृष्ठ $= ४\pi\text{र}^२$.

जुनी रीत : ज्याला पंचपात्री म्हणतात असें, म्हणजे डालडाच्या डब्याच्या आकाराचें, भांडें घ्यावें. त्याची त्रिज्या व उंची गोलाच्या त्रिज्येएवढी व व्यासाएवढी असावी. या पंचपात्रीस वाहेरून एक फडकें असें गुंडाळावें कीं, तें तिचें वक्रपृष्ठावर बरोबर बसेल. हेंच फडकें गोलावर बसविल्यास तें गोलपृष्ठास संपूर्णपणे आच्छादन करतें.

म्हणून गोलपृष्ठ = चितिपृष्ठ (cylinder) अर्थात गोलपृष्ठ $= २\pi र \times २र = ४\pi र^२$.

या रीतींत कांहीं मूलभूत प्रश्न निर्माण होतात. पण ते डावलले तर भास्कराचार्यांची रीत सुंदर आहे.

सूत्र ३ : गोलाचे घनफळ काढणे

नवी रीत : गोलाचें घनफळ काढतांना सूत्र दोन मधल्या चकतीचा पुन्हां विचार करूं. या चकतीची आकृति लहान उंचीच्या चितिसारखी आहे. तिची त्रिज्या **य** व जाडी dक्ष आहे. ∴ तिचें घनफळ $\pi य^२$ dक्ष आहे.

संकलन करून अर्धगोलाचें घनफळ $= \int_०^र \pi य^२ \, dक्ष = \int_०^र \pi (र^२ - क्ष^२) \, dक्ष$

$$= \pi \left[र^२ क्ष - \frac{क्ष^३}{३} \right]_०^र = \pi र^३ - \frac{\pi र^३}{३} = \frac{२}{३} \pi र^३ .$$

कारण अधःसीमेवर संकलक ० होतो. अर्थात, गोलाचें घनफळ $= \frac{४}{३} \pi र^३$

जुनी रीत – पूर्वीप्रमाणेच **र** त्रिज्येची व २र उंचीची पंचपात्री घ्यावी. **र** त्रिज्येचा गोल हा लुकणाचा (लहान मुलांच्या खेळांतल्या चिकणमातीचा) केला आहे असें समजावें व तो त्या पात्रांत घालून दाबून बसवावा. त्याचा वरचा पृष्ठभाग पायाशीं समांतर होईल अशी काळजी घ्यावी. पंचपात्रीत मोकळ्या राहिलेल्या भागाची उंची मोजावी. ती पंचपात्रीच्या उंचीच्या बरोबर $\frac{१}{३}$ भरते. अर्थात् गोलाचे घनफळ $= \frac{२}{३} \times$ पंचपात्रीचे घनफळ

$$= \frac{२}{३} \times \pi र^२ \times २र = \frac{४}{३} \pi र^३$$

येथेंही कांहीं मूलभूत प्रश्न उद्भवतात. पण त्यांचा सखोल विचार येथें कर्तव्य नाहीं.

उदाहरण

श्लोक १९६

यद्व्यासस्तुरगैर्मितः किल फलं क्षेत्रे समे तत्र किम् ।
व्यासः सप्तमितश्च यस्य सुमते गोलस्य तस्याऽपि किम् ॥

पृष्ठे कंदुकजालसंनिभफलं तस्यैव गोलस्य किम् ।
मध्ये ब्रूहि घनं फलं च विमलां चेद्वेत्सि लीलावतीम् ।। १९६ ।।

अर्थ : ज्याचा व्यास ७ आहे (तुरग = सूर्याच्या रथाचे घोडे) त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ चौरस मापांत किती? तसेंच ज्या गोलाचा व्यास ७ आहे त्या गोलावर, चेंडूप्रमाणें आच्छादक जाळें टाकलें, तर त्या जाळचाचें पृष्ठफळ काय ? व त्याच गोलाच्या आंतल्या भागाचें घनफळ काय ?

स्पष्टीकरण : वर्तुळाचें क्षेत्रफळ $= \frac{२२}{७} \times \left(\frac{७}{२}\right)^{२} = \frac{२२ \times ७}{४} = \frac{७७}{२} = ३८\frac{१}{२}$ चौ. एकक.

अधिक आसन्न हवें असल्यास $\frac{३९२७}{१२५०} \times \frac{४९}{४} = ३८\frac{२४२३}{५०००}$ चौरस एकक.

गोलाचें पृष्ठफळ $= ४ \times \frac{२२}{७} \times \frac{४९}{४} = १५४$ चौरस एकक.

गोलाचें घनफळ $= \frac{४}{३} \times \frac{२२}{७} \times \frac{३४३}{८} = \frac{५३९}{३} = १७९\frac{२}{३}$ घन एकक.

सूक्ष्म पृष्ठफळ $१५३\frac{११७३}{१२५०}$ चौरस एकक आणि

सूक्ष्म घनफळ $१७९\frac{१४८७}{२५००}$ घन एकक होईल.

श्लोक १९७

व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने । सूक्ष्मं फलं पंचसहस्रभक्ते ।।
रूद्राहते शक्रहृते ऽथवास्यात् । स्थूलं फलं संव्यवहारयोग्यम् ।।१९७।।

अर्थ : व्यासाच्या वर्गास ३९२७ नें गुणून ५००० नें भागल्यास वर्तुळाचें सूक्ष्म क्षेत्रफळ मिळतें. किंवा व्यास-वर्गास ११ नें गुणून १४ नें भागल्यास स्थूल क्षेत्रफळ मिळतें. व्यवहार सुटसुटीतपणें करण्यास स्थूल किंमत पुरे आहे. (रुद्र = ११ ; शक्र = १४)

श्लोक १९८

घनीकृतव्यासदलं निजैकविंशांशयुग्गोलफलं घनं स्यात् ।

अर्थ : व्यासाच्या घनास दोहोनें भागावें. या रकमेस २१ नें भागून येणारी संख्या त्याच रकमेंत मिळवावी म्हणजे गोलाचें घनफळ येतें.

स्पष्टीकरण : गोलाचें घनफळ $= \frac{व्या^3}{२} + \left(\frac{व्या^3}{२} \times \frac{१}{२१}\right) = \frac{व्या^3}{२} \times \left(१ + \frac{१}{२१}\right)$

$$= \frac{८\ त्रि^3}{२} \times \frac{२२}{२१} = \frac{४}{३} \times \frac{२२}{७} \times त्रि^3 = \frac{४}{३} \times \pi \times त्रि^3.$$

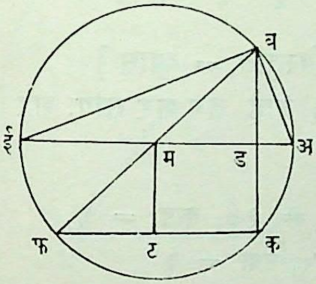
सूत्र : एकाद्या वर्तुळांत जीवा दिली असतां शर काढणे. (शर = मध्यबिंदूपासून टाकलेल्या लंब त्रिज्येचा चापाकडील भाग; जीवा = chord)

श्लोक १९९, २००

ज्याव्यासयोगांतरघातमूलं । व्यासस्तदूनो दलितः शरः स्यात् ।।
व्यासाच्छरोनात् शरसंगुणाच्च । मूलं द्विनिघ्नं भवतीह जीवा ।।१९९।।
जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते । व्यासप्रमाणं प्रवदंति वृत्ते ।। २०० ।।

अर्थ : [प्रथम खाली दिलेले पारिभाषिक शब्दांचे अर्थ लक्षात घ्या. (आकृति ३९ पाहा).

बक = ज्या = जीवा. **मब** = त्रिज्या,
अई = व्यास. **अड** = शर.]



आ. ३९

व्यासात जीवा मिळवून येणाऱ्या मूल्यास (व्यास – जीवा) यानें गुणावें. येणाऱ्या गुणाकाराचें वर्गमूळ व्यासांतून वजा करून त्याचें अर्ध केलें असतां शर मिळतो.

व्यासांतून शर वजा देऊन आलेल्या फलास शरानें गुणावें व त्याचें वर्गमूळ काढावें.

त्याची दुप्पट ही ज्या किंवा जीवा होईल.

शरावरून व्यास काढणें असल्यास जीवेच्या अर्धाच्या वर्गास शरानें भागावें व त्यांत शर मिळवावा.

स्पष्टीकरण : आपणांस कर्णवर्ग सिद्धांतानें, $\textbf{बफ}^2 - \textbf{बक}^2 = \textbf{फक}^2$ मिळतो.

$\therefore \textbf{फक}^2 = व्यास^2 - जीवा^2 = (व्यास + जीवा)\ (व्यास - जीवा).$

$\therefore \textbf{फक} = \sqrt{(व्यास + जीवा)\ (व्यास - जीवा)}$

$\therefore \textbf{टक} = \frac{\textbf{फक}}{२}, \quad \therefore \textbf{अड} = \textbf{अम} - \textbf{डम} = \textbf{अम} - \textbf{टक},$

$\therefore \textbf{अड} = \frac{व्यास}{२} - \frac{\textbf{फक}}{२} = \frac{१}{२}\left\{व्यास - \sqrt{(व्यास + जीवा)\ (व्यास - जीवा)}\right\}$

जीवा काढणें असल्यास व शर ठाऊक असल्यास, अर्धवर्तुळांतील कोन काटकोन असतो याचा उपयोग करून, समरूप △ **अबड, बडक** यांत

$$\frac{अड}{बड} = \frac{बड}{डई}.$$ अर्थात $बड^2 = अड \times डई = अड\ (अई - अड)$

$\therefore$ $बक = बड = २ \sqrt{अड\ (अई - अड)}.$ हें सूत्र सिद्ध.

तसेंच शर व जीवा ठाऊक असल्यास, वरीलप्रमाणेंच

$$ईड \times अड = बड^2. \quad \therefore ईड = \frac{(जीवार्ध)^2}{शर}$$

$$\therefore अई = अड + ईड = शर + \frac{जीवार्ध^2}{शर}$$ हें सूत्र सिद्ध.

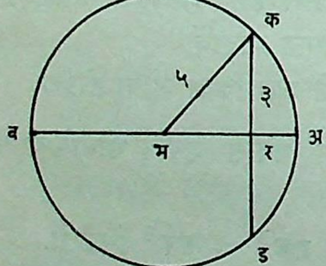
उदाहरण

श्लोक २०१

दशविस्तृतिवृत्तांतर्यत्र ज्या षण्मिता सखे ।
तत्रेषुं वद बाणाज्ज्यां ज्याबाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥२०१॥

अर्थ : [वृत्तांतर् = वर्तुळाच्या आंतली ; इषु = शर ; विस्तृति = व्यास]
हे मित्रा, एका वर्तुळाचा व्यास १० आहे व जीवा ६ आहे तर शर सांग. शर दिल्यास जीवा सांग. आणि शर, जीवा दिल्यास व्यास सांग.

स्पष्टीकरण : आकृति ४० पाहा. पहिल्या उदाहरणांत, **अब** = १०, **कड** = ६,



आ. ४०

$\therefore$ **अम** = **मक** = ५, **रक** = ३

म्हणून $रम^2 = ५^2 - ३^2 = १६$

$\therefore$ **रम** = ४. **शर** = **अर** = ५ − ४ = १

दुसऱ्या उदाहरणांत, **अब** = १०, **अर** = १, **अम** = ५, **मर** = ४. $कर^2 = ५^2 - ४^2 = ९.$ **कर** = ३.

जीवा = **कड** = ६.

तिसऱ्या उदाहरणांत, शर १ व जीवा ६.

$$\therefore व्यास = शर + \frac{जीवार्ध^2}{शर} = १ + \frac{९}{१} = १०.$$

सूत्र : वर्तुळांतर्गत सुसम त्रिकोण, चतुष्कोण, पंचकोन .... इत्यादींच्या बाजूंची लांबी काढणें.

श्लोक २०२, २०३, २०४

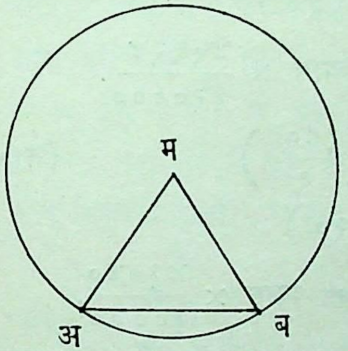
त्रिद्व्यंकाग्निनभश्चन्द्रैस्त्रिबाणाष्टयुगाष्टभिः ।
वेदाग्निबाणखाश्वैश्च खखाभ्राभ्ररसैः क्रमात् ॥२०२॥

बाणेषुनखबाणैश्च द्विद्विनंदेषुसागरैः ।
कुरामदशवेदैश्च वृत्ते व्याससमाहते ॥२०३॥
खखखाभ्रार्कसंभक्ते लभ्यन्ते क्रमशो भुजाः ।
वृत्तान्तत्र्यस्रपूर्वाणाम् नवास्रान्तं पृथक् पृथक् ॥२०४॥

अर्थ : [शब्दांचे अर्थ : अंक = ९, नभ = ०, चंद्र = १, युग = ४, नंद = ९, सागर = ४, राम = ३, त्र्यस्र = त्रिकोण, चतुरस्र = चौकोन, नवास्र = नवकोन, "अंकानाम् वामतो गतिः" हें सूत्र लक्षांत ठेवून]

वर्तुळाच्या व्यासास १०३९२३, ८४८५३, ७०५३४, ६००००, ५२०५५, ४५९२२ आणि ४१०३१ यांनीं गुणून गुणाकारास १२०००० यांनीं भागल्यास सुसम त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन इत्यादींच्या भुजांच्या लांब्या येतात.

स्पष्टीकरण : आकृति ४१ पाहा. या ठिकाणीं आपण वर्तुळांत **न** बाजूंचा (भुजांचा) सुसम बहुभुज काढला आहे असें समजूं व त्याची त्रिज्या **र** धरूं.



आ. ४१

तर △ **अमब** यांत ∠ **अमब** $= \frac{2\pi}{\text{न}}$ (π = १८०° धरुन)

आणि **अब** = २र × भुजज्या $\left(\frac{\pi}{\text{न}}\right)$. भुजज्या = sine

कारण, कोठल्याही **अबक** त्रिकोणांत $\frac{\textbf{बक}}{\text{भुजज्या } (\textbf{अ})}$

$$= \frac{\textbf{कअ}}{\text{भुजज्या } (\textbf{ब})} = \frac{\textbf{अब}}{\text{भुजज्या } (\textbf{क})} = \text{२ र}.$$

$$\therefore \textbf{अब} = \text{२र} \times \text{भुजज्या} \left(\frac{१८०^\circ}{\text{न}}\right).$$

∴ त्रिकोणाची भुजा = व्यास × भुजज्या ६०° (**न** = ३),

$$= \text{व्यास} \times \frac{८६६०}{१००००} \text{ (त्रिकोणमिति कोष्टकावरून)}.$$

$$\text{अर्थात् भुजा} = \text{व्यास} \times \frac{१०३९२०}{१२००००}.$$

तसेंच, चौरसाची भुजा = व्यास × भुजज्या ४५° (न = ४),

$$= \text{व्यास} \times \frac{७०७१}{१००००} = \text{व्यास} \times \frac{८४८५२}{१२००००}.$$

पंचकोनाची भुजा = व्यास × भुजज्या ३६° (न = ५),

$$= \text{व्यास} \times \frac{५८७८}{१००००} = \frac{७०५३६}{१२००००}.$$

षट्कोनाची भुजा = व्यास × भुजज्या ३०° (न = ६),

$$= \text{व्यास} \times \frac{१}{२} = \text{व्यास} \times \frac{६००००}{१२००००} = \text{त्रिज्या}$$

सप्तकोनाची भुजा = व्यास × भुजज्या $\left(\frac{१८०°}{७}\right)$, (न = ७),

$\frac{१८०°}{७}$ = २५° ४२′ ५२″. त्याऐवजी २५° ४३′ घेऊन.

$$\text{भुजा} = \text{व्यास} \times \text{भुजज्या } (२५° ४३') = \text{व्यास} \times \frac{४३४०}{१००००}$$

$$= \text{व्यास} \times \frac{५२०८०}{१२००००}$$

अष्टकोनाची भुजा = व्यास × भुजज्या $\left(\frac{१८०°}{८}\right)$ (न = ८),

$$= \text{व्यास} \times \text{भुजज्या } (२२° ३०')$$

$$= \text{व्यास} \times \frac{३८२७}{१००००} = \text{व्यास} \times \frac{४५९२४}{१२००००}.$$

आणि नवकोनाची भुजा = व्यास × भुजज्या $\left(\frac{१८०°}{९}\right)$ (न = ९),

$$= \text{व्यास} \times \text{भुजज्या } (२०°)$$

$$= \text{व्यास} \times \frac{३४२०}{१००००} = \text{व्यास} \times \frac{४१०४०}{१००००}.$$

वरील किंमतींत व भास्कराचार्यांच्या किंमतींत तफावत आहे. ती असणारच. कारण आम्ही घेतलेल्या किमती ४-दशांशस्थळी त्रिकोणमिति–कोष्टकावरून घेतलेल्या आहेत. अर्थात् तफावत चौथ्या किंवा पांचव्या आंकडयांत म्हणजे एकं, क्वचित् दहं स्थानच्या अंकांत आहे. सप्तभुजांत ५५ ऐवजीं शेवटले २ अंक ८० आहेत, कारण आम्ही कोन २५° ४२′ ५२″ ऐवजीं २५° ४३′ असा घेतला आहे. खानापूरकर शास्त्री यांनीं सर्व भुजा काढून दाखविल्या नाहींत.

सूत्र : ज्या-साधन म्हणजे जीवेची लांबी काढण्याचें. (या सूत्रांत, भुजा = जीवा = ज्या स्थूलमानानें मिळते. चाप = arc)

श्लोक २०५

चापोननिघ्नपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात् ।
पंचाहतः परिधिवर्गचतुर्थभागः ।।
आद्योनितेन खलु तेन भजेच्चतुर्घ्नं – ।
व्यासाहतं प्रथमप्राप्तमिह ज्यका स्यात् ।।२०५।।

अर्थ : परिघांतून ज्या-चाप वजा करून त्यास चापानेंच गुणावें. याला 'प्रथम' म्हणावें. नंतर परिधीचा वर्ग करून त्यास $\frac{५}{४}$ नें गुणावें व त्यांतून 'प्रथम' वजा द्यावा. नंतर प्रथमास या फलानें भागावें व व्यासाच्या चौपटीनें गुणावें म्हणजे जीवेची लांबी येते. (ज्यका = जीवा.)

स्पष्टीकरण : समजा परिघ **प** आहे व चाप **क** आहे. तर प्रथम = (**प** − **क**)**क**.

हा प्रथम $\frac{५\ प^{२}}{४}$ यांतून वजा दिला तर $\frac{५}{४}$ $प^{२}$ − क (प − क) ही संख्या येते.

हिनें प्रथमास भागून (४ × व्यास) येवढ्यानें गुणल्यास,

$$\text{जीवा} = \frac{४\ \text{व्या} \times (प - क)\,क}{\frac{५}{४}प^{२} - (प - क)\,क}$$ हे सूत्र आलें.

हे सूत्र मुळांत कसें तयार झालें यासंबंधीं निश्चित पत्ता लागत नाहीं. कारण हें स्थूल मानाचें आहे. तथापि ज्यावेळीं चाप शून्य असतो त्यावेळीं ज्या शून्य असते व ज्यावेळीं चाप परिघाएवढा होतो त्यावेळींही ज्या शून्य होते. म्हणून सूत्राच्या अंशस्थानीं **क** × (**प** − **क**) हे दोन अवयव आवश्यक आहेत. तिसरा अवयव व्यासाची पट पाहिजे. पण यामुळें छेद हा **प** आणि **क** यांत द्विघाती पाहिजे हें उघड आहे. कारण अंश त्रिघाती होतो. म्हणून,

$$\text{जीवा} = \frac{क्ष \times क\,(प - क)}{य - क\,(प - क)},$$ अशी कल्पना केली तर फक्त **क्ष**, **य** यांच्या किंमती

काढल्यास काम भागेल. आतां चाप **क** हा अर्धवर्तुळ केल्यास **क** = $\frac{प}{२}$ होतो आणि जीवा व्यासाबरोबर होते.

$$\therefore \text{व्यास} = \frac{क्ष \times \frac{प}{२}\left(प - \frac{प}{२}\right)}{य - \frac{प}{२}\left(प - \frac{प}{२}\right)} = \frac{\frac{क्षप^{२}}{४}}{य - \frac{प^{२}}{४}} = \frac{क्षप^{२}}{४य - प^{२}}.$$

तसेंच, चाप जर $\frac{प}{६}$ असेल तर जीवा त्रिज्येबरोबर.

$$\therefore \frac{\text{व्यास}}{२} = \frac{क्ष \times \frac{प}{६} \times \left(प - \frac{प}{६}\right)}{य - \frac{प}{६} \times \left(प - \frac{प}{६}\right)} = \frac{५\ क्षप^{२}}{३६\ य - ५\ प^{२}}$$

$\therefore$ **क्ष**, **य** निश्चित करण्यासाठीं आपणांजवळ २ समीकरणें आहेत.

त्यापैकी एक, $\text{क्षप}^2 = ४\,\text{य} \times \text{व्यास} - \text{प}^2 \times \text{व्यास}$.

आणि दुसरें, $१०\text{क्षप}^2 = ३६ \times \text{व्यास} - \text{प}^2 \times \text{व्यास}$.

पहिल्यास १० नें गुणून त्यांतून दुसरें वजा केल्यास,

$$० = ४\,\text{य} \times \text{व्यास} - ५\,\text{प}^2 \times \text{व्यास}.$$

$$\therefore \text{य} = \frac{५\,\text{प}^2}{४}. \text{ आणि क्ष प}^2 = ५\,\text{प}^2 \times \text{व्यास} - \text{प}^2 \times \text{व्यास}$$

किंवा $\text{क्षप}^2 = ४\text{प}^2 \times \text{व्यास}$. अर्थात् **क्ष** = ४ व्यास. म्हणून हे सूत्र स्पष्ट झालें. तथापि भास्कराचार्यानें हें सूत्र कसें निर्माण केलें ही शंका राहातेच.

उदाहरण

श्लोक २०६

अष्टादशांशेन समानवृत्तम् । एकादिनिघ्नेन च यत्र चापम् ।।
पृथक् पृथक् तत्र वदाशु जीवाम् । खार्कैमितं व्यासदलं च यत्र ।।२०६।।

अर्थ : ज्या वर्तुळाची त्रिज्या (व्यासदल) १२० आहे व ज्यांत चाप हा परिघाचा १८ वा हिस्सा आहे त्याची जीवा सांग. तसेंच चापाची दुप्पट, तिप्पट याप्रमाणें नवीन चाप घेतले तर होणाऱ्या जीवांचीं मानें सांग.

स्पष्टीकरण : समजा **र** त्रिज्या आहे, **क** चाप, **प** परिघ आहें.

$$\text{सूत्राप्रमाणें, जीवा} = \frac{८\,\text{त्रि} \times \text{क} \times (\text{प} - \text{क})}{\frac{५\,\text{प}^2}{४} - \text{क}\,(\text{प} - \text{क})}.$$

आतां $\text{क} = \frac{१}{१८}\,\text{प}$ म्हणजे आकृति १८ बाजूंची मानली, तर

$$\therefore \text{जीवा} = \frac{८\,\text{त्रि}.\frac{\text{प}}{१८} \times \frac{१७\,\text{प}}{१८}}{\frac{५\,\text{प}^2}{४} - \frac{१७\,\text{प}^2}{३२४}} = \frac{८\,\text{त्रि} \times १७}{३८८}$$

$$= \frac{८ \times १२० \times १७}{३८८} = ४२.६.$$

अर्थात्, १२० त्रिज्येच्या सुसम अष्टादशकोनाकृतींत भुज = ४२·६.
नवीन गणिताच्या नियमाप्रमाणें,

$$\text{जीवा} = \text{व्यास} \times \text{भुजज्या}\left(\frac{३६०^\circ}{१८\times२}\right) = २४० \times \text{भुजज्या } १०^\circ$$

$$= \frac{२४० \times १७३६}{१००००} = ४२·२६४.$$

या ठिकाणीं पहिल्या दशांशस्थळांत ४ चा फरक आहे, म्हणून उत्तर स्थूल आहे.

याचप्रमाणें, नवकोनांत $\text{क} = \frac{\text{प}}{९}$.

$$\therefore \text{जीवा} = \frac{८\,\text{त्रि} \times \frac{\text{प}}{९} \times \frac{८\text{प}}{९}}{\frac{५\text{प}^२}{४} - \frac{८\text{प}^२}{८१}} = \frac{९६० \times ८ \times ४}{४०५ - ३२} = \frac{३०७२०}{३७३} = ८२·१$$

याचप्रमाणें, चाप = $\frac{१}{६}$प, $\frac{२}{९}$प इत्यादि असतांना करावें.

भास्कराचार्यांच्या काळीं (इ. स. ११५०) लाग्रतमाचीं कोष्टकें नव्हतीं. म्हणून विद्यार्थ्यांना सूत्रें देणें क्रमप्राप्त होतें. साधारण प्रश्नांत स्थूल किंमत चालत असे.

सूत्र : जीवा दिली असतां चाप काढण्याचें सूत्र.

श्लोक २०७

व्यासाब्धिघातयुतमौर्विकयाविभक्तो ।
जीवांध्रिपंचगुणितः परिधेस्तु वर्गः ॥
लब्धोनितात् परिधिवर्गचतुर्थ भागात् ।
आप्ते पदे वृतिदलात्पतिते धनुः स्यात् ॥ २०७ ॥

अर्थ : परिधीच्या वर्गास $\frac{५}{४}$ जीवेनें गुणावें व (४ व्यास + जीवा) यानें भागावें.

परिधि वर्गाच्या चतुर्थ भागांतून ही रक्कम वजा करून येणाऱ्या फलाचें वर्गमूळ काढावें व ती रक्कम परिघाच्या अर्ध्यांतून वजा करावी म्हणजे चाप मिळतो. (मौर्विका = जीवा),

स्पष्टीकरण : येथें जीवेचें सूत्र वापरून चाप काढूं. या सूत्रांत चापाचा वर्ग असल्यानें तें वर्ग-समीकरणासारखें सोडवितां येईल.

आतां जीवा **ल** व चाप **क्ष** समजूं. तर. $\text{ल} = \frac{४\,\text{व्या}\,(\text{प} - \text{क्ष})\cdot\text{क्ष}}{\frac{५\,\text{प}^२}{४} - \text{क्ष}\,(\text{प}-\text{क्ष})}$

$$\therefore \frac{५ प^२ ल}{४} - प ल क्ष + ल क्ष^२ = ४ व्या प क्ष - ४ व्या क्ष^२.$$

अर्थात्, $$क्ष^२(४ व्या + ल) - क्ष (प ल + व्या प) + \frac{५ प^२ ल}{४} = ०$$

$$\therefore क्ष^२ - प क्ष = \frac{-५प^२ल}{१६व्या + ४ल}.$$

वर्गपूरण करून, $$क्ष^२ - प क्ष + \frac{प^२}{४} = \frac{प^२}{४} - \frac{५ प^२ ल}{१६ व्या + ४ ल}.$$

$$\therefore \left(क्ष - \frac{प}{२}\right)^२ = \frac{प^२}{४} - \frac{\frac{५}{४}प^२ ल}{४व्या + ल}$$

$$\therefore क्ष - \frac{प}{२} = \sqrt{\frac{प^२}{४} - \frac{\frac{५}{४} प^२ ल}{४ व्या + ल}}$$ हें सूत्र सिद्ध.

उदाहरण

श्लोक २०८

विदिता इह ये गुणास्ततो । वद तेषामधुना धनुर्मितिम् ।।
यदि ते ऽस्ति धनुर्गुणक्रिया- । -गणिते गाणितिकातिनैपुणम् ।।२०८।।

अर्थ : हे गणित्या, जर तुला धनुर्गुणक्रिया नीट ठाऊक असेल, तर जेथें ज्यांच्या लांब्या ४२, ८२, १२०,... वगैरे आहेत, (व्यास २४० धरून), तेथें धनुर्मान म्हणजे चाप परिघाच्या कितवा हिस्सा येतील तें सांग,

स्पष्टीकरण : वरील सूत्राप्रमाणें जीवा ४२ आहे व व्यास २४० आहे. परिधि १८ समजूं. तर चाप क्ष धरून,

$$क्ष = \frac{१८}{२} \pm \sqrt{\frac{३२४}{४} - \left(\frac{५}{४} \times ३२४ \times ४२\right) \div (९६० + ४२)}$$

$$= ९ \pm \sqrt{८१ - १७०१० \div १००२}$$

पण $$\frac{१७०१०}{१००२} = \text{जवळजवळ } १७,$$

$$\therefore क्ष = ९ \pm \sqrt{८१ - १७} = ९ \pm ८ = १७ \text{ किंवा } १.$$

याचाच अर्थ ४२ जीवेचा चाप $\frac{१}{१८}$ परिघ = २०°,

किंवा मोठा चाप = ३४०° किंवा $\frac{१७}{१८}$ परिघ.

समजा जीवा ८२ आहे, तर

$$जीवा = \frac{१८}{२} \pm \sqrt{\frac{३२४}{४} - \left(\frac{५}{४} \times ३२४ \times ८२\right) \div (९६० + ८२)}$$

$$= ९ \pm \sqrt{८१ - ३३२१० \div १०४२}$$

$$= ९ \pm \sqrt{८१ - ३२} = ९ \pm ७ = १६ \text{ किंवा } २.$$

$$\therefore \text{ लघुचाप} = २ = \frac{३६०}{९} = ४०°;\ \text{गुरुचाप} = १६ = ३२०° \text{ हें उत्तर.}$$

याप्रमाणेंच इतर चाप काढावे.

प्रकरण २८

खातव्यवहार

सूत्र : खळग्याचें घनफळ काढण्याचें.

श्लोक २०९

गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या ।
स्थानकमित्या सममितिरेवं दैर्घ्येच व वेधे च ।।
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात् ।।२०९।।

अर्थ : ज्या खळग्याचें घनफळ (घनहस्तांत) काढावयाचें आहे, तो खड्डा वाकडयातिकडया आकृतीचा असल्यानें, त्याची रुंदी पुष्कळ ठिकाणीं मोजून त्यांच्या बेरजेस, जितक्या स्थानीं रूंदी मोजली त्या अंकानें भागावें म्हणजे सरासरी रुंदी मिळते. याला सममिति म्हणतात. याच पद्धतीनें लांब्यांची सरासरी व खोल्यांची सरासरी घ्यावी. सरासरी रुंदी व सरासरी लांबी यांचा गुणाकार हें सरासरी क्षेत्रफळ. या सरासरी क्षेत्रफळास सरासरी खोलीनें गुणलें म्हणजे सरासरी घनफळ मिळेल.

उदाहरण

श्लोक २१०

भुजवक्रतया दैर्घ्यं दशेशार्ककरैर्मितम् ।
त्रिषु स्थानेषु षट्पंचसप्तहस्ता च विस्तृतिः ।।

यस्य खातस्य वेधोऽपि द्विचतुस्त्रिकरः सखे ।
तत्र खाते कियंतः स्युर्घनहस्ताः प्रचक्ष्व मे ।।२१०।।

अर्थ : एका वांकडयातिकडया खळग्याची लांबी तीन ठिकाणीं मोजली, ती अनुक्रमे १०, ११ (ईश) व १२ हात (अर्क) भरली, तीन ठिकाणची रुंदी ६, ५, ७ हात भरली. आणि खोली २, ४, ३ हात भरली. तर खळग्याचें घनमान किती ?

स्पष्टीकरण : सरासरी लांबी $= \frac{१० + ११ + १२}{३} =$ ११ हात.

सरासरी रुंदी $= \frac{५ + ६ + ७}{३} =$ ६ हात.

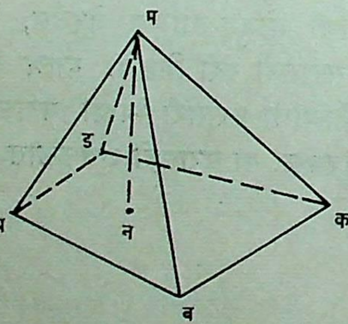
सरासरी खोली $= \frac{२ + ३ + ४}{३} =$ ३ हात.

∴ सरासरी घनमान $=$ ११ × ६ × ३ $=$ १९८ घनहस्त.

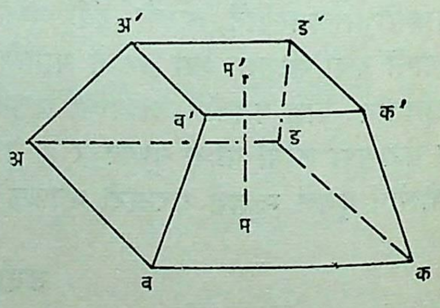
येथें हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं ज्या लांब्या मोजल्या त्या एकमेकांपासून साधारण समान अंतरावर, खळग्याच्या मुखाचे ४ भाग करून, घ्यावयाच्या. तीच गोष्ट इतर मापांस लागू. यावरून व्यवहारांत लोकांस उपयोगी पडतील अशाच रीती भास्कराचार्य देतो हें दिसून येतें.

सूत्र : सूचीचें व सूचि-खंडाचें घनफळ काढण्याचें.
(सूचि = पिरामिड; सूचिखंड = पिरामिडच्या पायास समांतर पातळीनें कापल्यास वरील सूचि सोडून उरलेला भाग.)

आकृति ४२ (१) मध्यें सूचि दाखविला आहे. त्याचा पाया **अबकड** चौकोन आहे. शिर **म** आहे. **मन** रेषा पायास लंब असून तिला सूचीची उंची म्हणतात.



आ. ४२ (१) सूचि



आ. ४२ (२) सूचिखंड

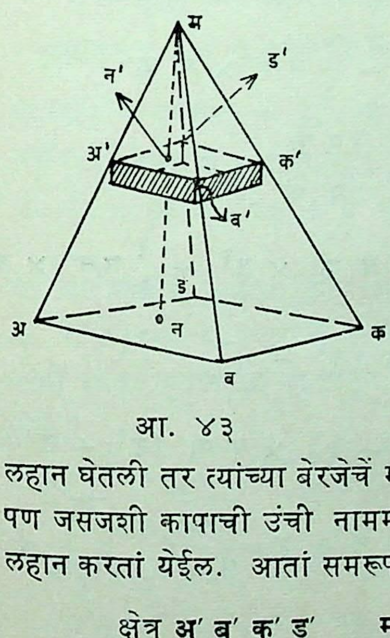
तसेंच, आकृति ४२ (२) मध्यें **अबकड** व **अ'ब'क'ड'** या सूचीच्या पायाशी समांतर पातळ्या आहेत. रेषा **अ अ', ब ब', क क', ड ड'** या वाढविल्यास एकाच बिंदूंत म्हणजे शिरांत मिळतील. **म म'** ही रेषा पायास लंब आहे. अशा प्रकारच्या घनास सूचिखंड म्हणतात.

श्लोक २११

मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं षड्भिः ।
क्षेत्रफलं सममेतद्वेधगुणं घनफलं स्पष्टम् ।
समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति ॥२११॥

अर्थ : सूचिखंडाच्या पायाचें क्षेत्रफळ, मुखाचें क्षेत्रफळ आणि त्यांच्या लांबी व रुंदी यांच्या बेरजांनीं होणाऱ्या चौकोनाचें क्षेत्रफळ यांची बेरीज करावी. तिला ६नीं भागावें व सूचिखंडाच्या उंचीनें गुणावें म्हणजे सूचीचें घनफळ येतें. सूचीचें घनफळ सम-खाताच्या (चिति = prism) घनफळाच्या तिसरा हिस्सा असते.

स्पष्टीकरण : चिति व चितिखंड (प्रस्थ) यांचीं घनफळें काढतांना घनफळ शब्दाची व्याख्या बदलावी लागते. तथापि त्या भानगडींत न पडतां व घनफळाची मूळ व्याख्या गृहीत धरून (लांबी × रुंदी × उंची) चितीचें घनफळ काढूं. (आकृति ४३)



आ. ४३

समजा **अबकड** हा चितीचा चौकोनी पाया आहे. तो चौरस किंवा आयत असलाच पाहिजे असें नाहीं. त्याचें क्षेत्र मात्र ठाऊक असलें पाहिजे. तो पंचकोनी, षट्कोनी, त्रिकोणी असला तरी चालेल. त्याचें क्षेत्रफळ **स** धरूं. **मन** उंची **र** धरूं. पायाशीं समांतर अशी **अ' ब' क' ड'** ही पातळी **म** च्या खाली **क्ष** खोलीवर काढा. या पायावर dक्ष उंचीचा **व** विटेच्या आकाराचा एक काप घ्या. ह्या कापाचें घनफळ dक्ष × **अ' ब' क' ड'** इतकें होईल. असे अनेक काप **म** पासून पायापर्यंत घेतले व त्यांची जाडी अगदीं लहान घेतली तर त्यांच्या बेरजेचें मान चितीच्या घनफळाएवढें होईल. थोडी कसर राहील, पण जसजशी कापाची उंची नाममात्र होईल तसतशी ही कसर कोठल्याही संख्येपेक्षां लहान करतां येईल. आतां समरूप आकृतींच्या सिद्धांताप्रमाणें,

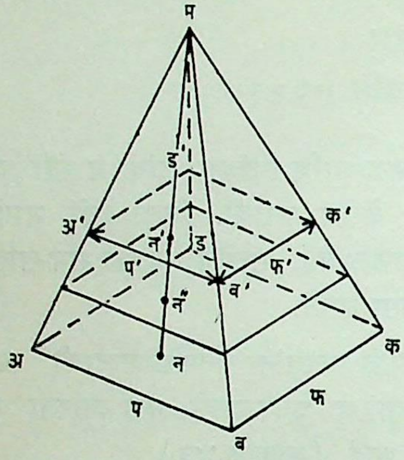
$$\frac{\text{क्षेत्र अ' ब' क' ड'}}{\text{स}} = \frac{\text{म न'}^{2}}{\text{म न'}^{2}}. \qquad \therefore \text{ क्षेत्र अ' ब' क' ड'} = \frac{\text{स}\cdot\text{क्ष}^{2}}{\text{र}^{2}}$$

$$\therefore \text{ कापाचें घनफळ} = \frac{\text{स} \times \text{क्ष}^{2}}{\text{र}^{2}} \times d\text{क्ष}.$$

$$\text{संकलन करून सूचीचें घनफळ} = \int_{0}^{\text{र}} \frac{\text{स क्ष}^{2}}{\text{र}^{2}}\, d\text{क्ष} = \frac{\text{स}}{\text{र}^{2}}\left[\frac{\text{क्ष}^{3}}{\text{३}}\right]_{0}^{\text{र}}$$

$$= \frac{\text{सर}^{3}}{\text{३र}^{2}} = \frac{\text{१}}{\text{३}}\text{स} \times \text{र} = \frac{\text{१}}{\text{३}} \times \text{ उंची} \times \text{ पायाचें क्षेत्रफळ.}$$

ज्या पद्धतीनें सूचीचें घनफळ काढलें तींच पद्धत सूचिखंडास लावूं. मात्र भास्कराचार्यांच्या सूत्राची सिद्धि होण्यासाठीं पाया आयताकृति आहे असें समजूं.



आ. ४४

आकृति ४४ मध्यें **अ ब क ड — अ' ब' क' ड'** यांतील पिंड (solid) हें सूचिखंड आहे. यांत **अब = प, बक = फ, अ'ब' = प', ब'क' = फ'.** तसेंच **न न' = र** (उंची). सूचिखंडाच्या तिर्यक् भुजा **अ अ', ब ब', क क', ड ड'** वाढविल्या म्हणजे **म** मध्यें एक-संपाती होतात. यामुळें धनफळाचा विचार करतांना सूचिखंड = सूचि **म अ ब क ड** — सूचि **म अ' ब' क' ड'.**

आता आयत **अ ब क ड = प × फ**

आयत **अ' ब' क' ड' = प' × फ'**

तसेंच, **न न' = र = म न — म न'.**

$$\therefore \text{सूचिखंडाचें घनफळ} = \frac{१}{३}\,\text{मन} \times \text{पफ} - \frac{१}{३}\,\text{मन}' \times \text{प}'\text{फ}'$$

$$\text{शिवाय } \frac{\text{प फ}}{\text{प}'\text{फ}'} = \frac{\text{म न}^२}{\text{मन}'^२} = \text{ट}^२ . \quad \frac{\text{म न}}{\text{म न}'} = \frac{\sqrt{\text{प फ}}}{\sqrt{\text{प}'\text{ फ}'}} = \text{ट समजा.}$$

$$\therefore \text{सूचिखंडाचें घनफळ} = \frac{१}{३}\,\text{म न}' \times \text{ट} \times \text{प}'\text{ फ}' \times \text{ट}^२ - \frac{१}{३}\,\text{म न}' \times \text{प}'\text{ फ}'$$

$$= \frac{१}{३}\,\text{म न}' \times \text{प}'\text{फ}' \,(\text{ट}^३ - १)$$

$$= \frac{१}{३}\,\text{म न}' \times (\text{ट} - १) \times \text{प}'\text{ फ}' \,(\text{ट}^२ + \text{ट} + १)$$

$$\text{पण ट} - १ = \frac{\text{म न} - \text{म न}'}{\text{म न}'} \text{ आणि ट}^२ + \text{ट} + १ = \frac{\text{प फ}}{\text{प}'\text{फ}'} + \frac{\sqrt{\text{प फ}}}{\sqrt{\text{प}'\text{ फ}'}} + १.$$

$\therefore$ सूचिखंडाचें घनफळ

$$= \frac{१}{३} \times \frac{\text{न न}'}{\text{म न}'} \times \text{मन}' \times \text{प}'\text{फ}' \times \left\{\frac{\text{पफ} + \text{प}'\text{ फ}' + \sqrt{\text{प फ} + \text{प}'\text{ फ}'}}{\text{प}'\text{ फ}'}\right\}$$

$$= \frac{१}{३}\,\text{न न}' \left\{\text{प फ} + \text{प}'\text{ फ}' + \sqrt{\text{पफ} \times \text{प}'\text{ फ}'}\right\}$$

$$= \frac{१}{३}\,\text{न न}' \times २^१ \left\{२\,\text{पफ} + २\,\text{प}'\text{फ}' + २\sqrt{\text{पफ} + \text{प}'\text{ फ}'}\right\}$$

$$= \frac{१}{६}\,\text{न न}' \left\{\text{प फ} + \text{प}'\text{ फ}' + \left(\sqrt{\text{प फ}} + \sqrt{\text{प}'\text{ फ}'}\right)^२\right\} \quad \ldots\ldots \quad (१)$$

आपणांस असेंहि दिसेल कीं सूचिखंडास उंचीच्या मध्यबिंदूतून समांतर छेदक पातळी काढली व त्या आयताचें क्षेत्रफळ **ग** मानलें, तर

$$\text{ग} = \frac{(\text{प} + \text{प}')}{२} \times \frac{(\text{फ} + \text{फ}')}{२} . \therefore ४\,\text{ग} = (\text{प} + \text{प}')\,(\text{फ} + \text{फ}') \quad .....(२)$$

तसेंच समरूप चौकोनांत किंवा कोठल्याहि दोन समरूप आकृतींत, $\frac{\text{क्षेत्र}_१}{\text{भुज}_१^२} = \frac{\text{क्षेत्र}_२}{\text{भुज}_२^२}$

आतां उंची मधल्या पातळीस **न″** मध्यें छेदील तर,

$$\frac{\text{पफ}}{\text{मन}^२} = \frac{\text{प}'\text{फ}'}{\text{मन}'^२} = \frac{\text{ग}^२}{\text{मन}''^२} \qquad \therefore \frac{\sqrt{\text{पफ}}}{\text{मन}} = \frac{\sqrt{\text{प}'\text{फ}'}}{\text{मन}'} = \frac{\sqrt{\text{ग}}}{\text{मन}''}$$

$$\text{अर्थात्}\ \frac{\sqrt{\text{पफ} + \sqrt{\text{प}'\text{फ}'}}}{\text{मन} + \text{मन}'} = \frac{\sqrt{\text{ग}}}{\text{मन}''};\ \text{किंवा}\ \frac{\sqrt{\text{पफ}} + \sqrt{\text{प}'\text{फ}'}}{२\,\text{मन}''} = \frac{\sqrt{\text{ग}}}{\text{मन}''}$$

$$\therefore \sqrt{\text{पफ}} + \text{प}'\text{फ}' = २\sqrt{\text{ग}}.\quad \text{अर्थात्}\ (\sqrt{\text{पफ}} + \sqrt{\text{प}'\text{फ}'})^२ = ४\,\text{ग}.$$

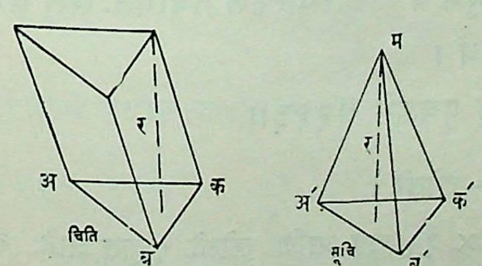
समीकरण (१) मध्यें ही किंमत घालून,

सूचिखंडाचे घनफळ $= \frac{१}{६} \times \text{नन}'(\text{पफ} + \text{प}'\text{फ}' + ४\text{ग})$

आणि (२) वरून, सूचिखंडाचे घनफळ

$= \frac{१}{६} \times \text{नन}'\{\text{पफ} + \text{प}'\text{फ}' + (\text{प} + \text{प}')(\text{फ} + \text{फ}')\}$, हें सूत्र सिद्ध.

टीप– वर ज्या रीतीनें सिद्धता दिली आहे त्यांत चलनकलन शास्त्राचा वापर केला आहे. कै. खानापूरकर शास्त्र्यांच्या रीतींत वर्गैक्य, घनैक्य, संकलन इत्यादींचा वापर आहे. या रीती आतां जुनाट झाल्या असून महाविद्यालयांतून वर दिलेली रीतच वापरण्याची प्रथा आहे.*



आ. ४५ (१.२)

आकृति ४५ मध्ये दोन एकरूप त्रिकोणी पायांवर एक चिति (prism) व एक सूचि (pyramid) दाखविले आहेत. त्यांची उंचीही सारखी (**र**) आहे.

तर सूचीचें घनफळ $= \frac{१}{३}\ \text{र} \times \triangle\,\text{अ}'\text{ब}'\text{क}'$

चितीचें घनफळ $= \text{र} \times \triangle\ \text{अबक}.$

$$\because \triangle\,\text{अबक} \equiv \triangle\,\text{अ}'\text{ब}'\text{क}' \quad \therefore \frac{\text{सूचिफळ}}{\text{चितिफळ}} = \frac{१}{३}$$

म्हणून, सूचीचें घनफळ $= \frac{१}{३} \times$ चितीचें घनफळ. हें सिद्ध.

*ना. ह. फडके : Pure Solid Geometry

उदाहरण १

श्लोक २१२

मुखे दशद्वादशहस्ततुल्यम् । विस्तारदैर्घ्यं तु तले तदर्धम् ।।
यस्याः सखे सप्तकरश्च वेधः । का खातसंख्या वद तत्र वाप्याम् ।।२१२।।

अर्थ : सूचिखंडाच्या आकाराची एक विहीर आहे. (खालीं अरुंद, वर रुंद) तिचें तोंड आयाताकृति १० × १२ हात आकाराचें आहे आणि तळ या मापांच्या अर्ध्या आकाराचा म्हणजे ५ × ६ हात एवढा आहे. त्याची उंची सात हात आहे तर त्याचे घनमान किती तें, मित्रा, सांग.

स्पष्टीकरण : सूत्राप्रमाणें, घनमान $= \frac{\text{उंची}}{६}$ (मुखज + तलज + युतिज)

$$= \frac{७}{६} \; (१० \times १२ + ५ \times ६ + १५ \times १८) \text{ घनहस्त}$$

$$= \frac{७}{६} \times ६ \; (२० + ५ + ४५) = ७ \times ७० = ४९०$$ घनहस्त, हें घनफळ.

उदाहरणें २, ३, ४, ५

श्लोक २१३

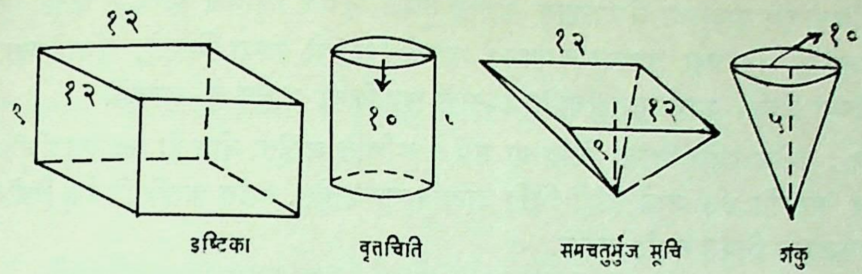
खाते ऽथ तिग्मकरतुल्यचतुर्भुजे च । किं स्यात्फलं नवमितः खलु यत्र वेधः ।।
वृत्ते तथैव दशविस्तृतिपंचवेधे ।
सूचीफलं वद तयोश्च पृथक् पृथङ्मे ।।२१३।।

अर्थ :– (तिग्म = सूर्य = १२, वेध = खोली)

(२) एका खळग्याचें तोंड १२ × १२ हात आणि खोली ९ हात आहे. तर त्याचें घनफळ काय ? (खळगा पाण्याच्या टांकीच्या आकाराचा आहे). तसेंच

(३) एका खळग्याचें तोंड वर्तुळाकृति असून त्याचा व्यास १० हात व खोली ५ हात आहे. तर त्याचें घनफळ काय ?
(खळगा वृत्तचितीच्या, म्हणजे cylinder च्या आकृतीचा आहे.) याच ठिकाणीं (४) पाया व (५) उंची तशींच अशा सूची असतील तर त्यांची घनफळें काय ?

स्पष्टीकरण : आकृति ४६ मध्ये हे चारही पिंड–प्रकार दाखविले आहेत.



आकृति ४६

(२) इष्टिकेचें घनफळ = १२ × १२ × ९ = १२९६ घनहस्त.

(३) दंडगोलाचें घनफळ $= \frac{२२}{७} \times २५ \times ५ = \frac{१२५ \times २२}{७} = \frac{२७५०}{७}$

$= ३९२\frac{६}{७} =$ ३९२.८६ घनहस्त.

(४) समचतुर्भुज सूचीचें घनफळ $= \frac{१}{३} \times$ इष्टिकेचें घनफळ

$= \frac{१२९६}{३} =$ ४३२ घनहस्त.

(५) शंकूचें घनफळ $= \frac{१}{३} \times$ दंडगोलाचें घनफळ

$= \frac{१}{३} \times$ ३९२.८६ घनहस्त = १३०.९५ घनहस्त, हें उत्तर.

प्रकरण २८

सूत्र : चितीचें घनफळ काढण्याचें सूत्र.

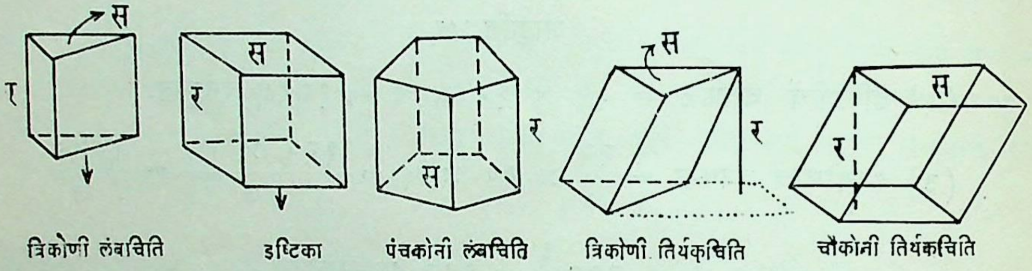
श्लोक २१४, २१५

उच्छ्रयेन गुणितं चितेः किल । क्षेत्रसंभवफलं घनं भवेत् ॥
इष्टिकाघनहृते घने चितेः । इष्टिकापरिमितिश्च लभ्यते ॥२१४॥
इष्टिकोच्छ्रयहृदुच्छ्रितिश्चितेः । स्युःस्तराश्च दृषदां चितेरपि ॥२१५॥

अर्थ : [ज्या घनाकृतीचा पाया व मुख एकरूप बहुभुजाकृति असून त्या समांतर पातळीत संगत भुजा समांतर करून ठेवलेल्या असतात व त्यांचे संगत कोनबिंदू जोडून घनाकृति होते तिला चिति किंवा प्रिझम (prism) म्हणतात.] चिति म्हणजेच ढीग.

चितीच्या पायाच्या क्षेत्रफळास उंचीनें गुणलें म्हणजे चितीचें घनफळ येतें. चितीच्या घनफळास विटेच्या घनफळानें भागलें म्हणजे विटांची संख्या मिळते. चितीच्या उंचीस विटेच्या उंचीनें भागल्यास चितींत विटांचे थर किती आहेत हें समजतें.

स्पष्टीकरण : वरील श्लोकांतल्या चिति या सर्व लंब-चिति आहेत. वीट ही लंबचतुर्भुजीय चिति आहे. आकृति ४७ मध्ये कांहीं चिति दाखविल्या आहेत. त्यांत काही तिर्यक् चिति आहेत घनफळाचा नियम सर्वांस एकच.



आकृति ४७

या प्रत्येक आकृतींत घनफळ = पायाचे क्षेत्रफळ **स** × उंची **र**.

उदाहरण

श्लोक २१६, २१७

अष्टादशांगुलं दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशांगुलः ।
उच्छ्रितिस्त्र्यंगुला यासामिष्टिकास्ताश्चितौ किल ॥ २१६ ॥
यद्विस्तृतिः पंचकराष्टहस्तं । दैर्घ्यं च यस्यां त्रिकरोच्छ्रितिश्च ॥
तस्यां चितौ किं फलमिष्टिकानां । संख्या च का ब्रूहि कति स्तराश्च॥२१७॥

अर्थ : ज्या विटेची लांबी ८१ अंगुळें, रुंदी १२ अंगुळें आणि जाडी ३ अंगुळें आहे, अशा विटांनीं, ८ हात लांब, ५ हात रूंद आणि ३ हात उंच अशी, काटकोन चौकोनाकृति चिति बांधावयाची आहे. तर त्या चितीचें घनफळ काय ? विटांची संख्या किती व विटांचे थर किती होतील?

स्पष्टीकरण : (दैर्घ्य = लांबी; विस्तार = रुंदी; उच्छ्रिति = उंची; २४ अंगुळें = १ हात)

चितीचें घनफळ = ८ × ५ × ३ घनहस्त = १२० घनहस्त.

$$\text{विटेचें घनफळ} = \frac{१८ \times १२ \times ३}{२४ \times २४ \times २४} \text{ घनहस्त.} = \frac{३}{६४} \text{ घनहस्त}$$

$$\text{विटांची संख्या} = १२० \div \frac{३}{६४} = \frac{१२० \times ६४}{३} = ४० \times ६४ = २५६०.$$

$$\text{थरांची संख्या} = \frac{\text{चितीची उंची}}{\text{विटेची उंची}} = \frac{२४ \times ३}{३} = २४; \text{ हें उत्तर.}$$

प्रकरण २९

सूत्र : करवतीनें लांकडें कापल्यास काम किती झालें त्याचा हिशेब करणें.

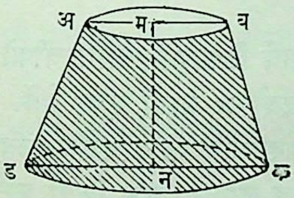
श्लोक २१८

पिंडयोगदलमग्रमूलयोः । दैर्घ्यसंगुणितमंगुलात्मकम् ॥

दारूदारणपथैः समाहतम् । षट्स्वरेषुविहृतं करात्मकं ॥ २१८ ॥

अर्थ : लांकडाची वरील (मुखाची) जाडी व तळची जाडी यांच्या बेरजेच्या अर्धास वाशाच्या लांबीनें गुणावें म्हणजे लांकडाच्या एका कापाचें क्षेत्रफळ येते. असें लाकडाचें विदारण (कापणें) जितके वेळां झालें असेल त्या संख्येनें एका छेदाच्या (कापाच्या) क्षेत्रफळास गुणावें म्हणजे कापण्याचें माप चौरस अंगुळांत येतें. या किंमतीस ५७६ नें भागल्यास तेच माप चौरस हातांत येईल. (स्वर = ७; इषु = ५)

स्पष्टीकरण : साधारणतः लांकडाचा लांब वासा किंवा ओंडका हा शंकुखंडासारखा (frustum of a cone) असतो. आकृति ४८ मध्ये दाखविल्याप्रमाणें त्याची आकृति असते. त्याचें तोंड वर्तुळाकृति व तळही वर्तुळाकृति असतो. समजा, करवतीनें कापून **अबकड** हा मध्यवर्ती उभा छेद घेतला तर छेदाची आकृति **अबकड** ही समलंब चौकोनासारखी झाली. छेदाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ **मन (अब+कड)** इतके होईल. आतां याच ओंडक्याचे **अबकड**-समांतर काप काढले तर त्या प्रत्येक विदारणक्षेत्राचें क्षेत्रफळ साधारणपणें **अबकड** एवढेंच होईल. किंचित् कमी होईल हें खरें पण फार कमी होणार नाहीं. म्हणून करवत जितके ठिकाणी लागली त्या संख्येनें **अबकड** च्या क्षेत्रफळास गुणल्यास एकंदर कापाईचें क्षेत्रफळ मिळेल. हें चौरस अंगुळात्मक असल्यास त्यास २४ × २४ नें भागावें म्हणजे तें चौरस हातांत मिळेल.



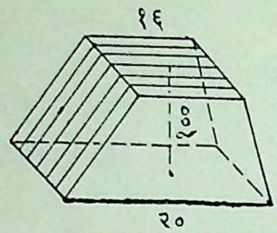
आ. ४८

उदाहरण

श्लोक २१९

मूले नखांगुलमितो ऽ थ नृपांगुलो ऽ ग्रे ।
पिण्डः शतांगुलमितं किल यस्य दैर्घ्यम् ॥
तद्दारुदारणपथेषु चतुर्षु किं स्यात् ।
हस्तात्मकं वद सखे गणितं द्रुतं मे ॥ २१९ ॥

अर्थ : एका ओंडक्याची तळाकडील बाजू २० अंगुळे व मुखाकडील बाजू १६ अंगुळें आहे आणि त्याची लांबी १०० अंगुळें आहे. हा ओंडका ४ ठिकाणीं कापला तर, मित्रा, कापाईचें क्षेत्रफळ किती चौरस हात होईल तें सांग. ओंडक्याचा आकार आकृति ४९ प्रमाणें समजावा. कापाईचें क्षेत्रफळ



आ. ४९

$$= \frac{१}{२} \times १०० \, (२० + १६) \times \frac{१ \times ४}{५७६}$$

$$= \frac{५० \times २}{३२} \times ४ = \frac{५० \times ४}{१६} = \frac{२५ \times ४}{८} = १२\tfrac{१}{२}$$ चौरस हात, हें उत्तर.

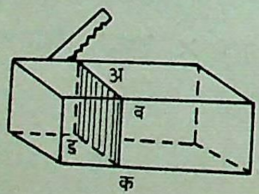
सूत्र : लांकूड तिरपें कापल्यास कापाईचें क्षेत्रफळ काढणें.

श्लोक २२०

छिद्यते तु यदि तिर्यगुक्तवत् । पिंडविस्तृतिहतेः फलं तदा ।।
इष्टिकाचिति दृषच्चितिखात ।–क्राकचव्यवहृतौ खलु मूल्यम् ।।
कर्मकारजनसंप्रतिपत्त्या । तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन ।। २२० ।।

अर्थ : लांकडाची एक तुळई अशी आहे कीं जिचा उभा छेद सर्व ठिकाणीं समान चौकोन आहे. ही तुळई तिरकस कापली तर कर्तन–क्षेत्राचें क्षेत्रफळ रुंदी × जाडी एवढें येतें. विटांची चळथ, दगडांची चळथ, खळगे, करवतकाम यांचें मूल्य खालील गोष्टींवर अवलंबून असतें. कामकरी माणसें कशी व किती मिळतात यावर, तसेंच लांकूड मऊ किंवा कठीण आहे यावरही कापाईचा खर्च अवलंबून असतो.

स्पष्टीकरण : आकृति ५० मध्ये एक तुळई दाखविली आहे. तिचे तुकडे करणें असल्यास तुळई तिरकस पकडून **अ** जवळ करवत लावून **अबकड** हा छेद तयार होईल. त्याचें क्षेत्रफळ अर्थातच **अब × बक** इतकें होईल.



आ. ५०

उदाहरण

श्लोक २२१

यद्विस्तृतिर्दंतमितांगुलानि । पिंडस्तथा षोडश यत्र काष्ठे ।।
छेदेषु तिर्यङ्नवसु प्रचक्ष्व । किं स्यात्फलं तत्र करात्मकं मे ।। २२१ ।।

अर्थ : एका तुळईची रुंदी ३२ अंगुळें व जाडी (पिंड) १६ अंगुळे आहे. तुळईस नऊ ठिकाणीं तिरपें कापलें. तर छेदांचें क्षेत्रफळ किती चौरस हात होईल ?

स्पष्टीकरण : एकूण क्षेत्रफळ $= \frac{९ \times १६ \times ३२}{५७६}$ चौरस हात = ८ चौरस हात.

(५७६ चौरस अंगुळें = १ चौरस हात)

प्रकरण ३०

सूत्र : धान्याच्या राशींचे घनफळ काढणे

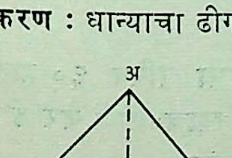
श्लोक २२१

अनणुषु दशमांशो ऽणुष्वथैकादशांशः ।
परिधिनवमभागः शूकधान्येषु वेध : ।।
भवति परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने ।
घनगणितकराः स्युर्मागघा ताश्च खार्यः ।। २२१ ।।

अर्थ : ज्या धान्यांचे दाणे गोलाकृति व मोठे असतात त्यांचे ढीग जमिनीवर रचले तर ढिगाची उंची परिघाच्या $\frac{१}{१०}$ असते. ज्या धान्यांचे दाणे गोलाकृति पण लहान असतात त्यांच्या ढिगांत उंची परिघाच्या $\frac{१}{११}$ असते. शूक धान्यांत (ज्यांचा दाणा टोंकदार असतो) ढिगाची उंची परिघाच्या $\frac{१}{९}$ असते. अशा ढिगांचें घनफळ पुढीलप्रमाणें मिळतें.

परिघाच्या सहाव्या हिश्शाचा वर्ग करून त्याला उंचीनें गुणावें. हा गुणाकार राशीचें घनफळ घनहस्तांत दाखवितो. तितक्याच मागध खारिका इतकें तें धान्य होतें.

स्पष्टीकरण : धान्याचा ढीग हा शंकूच्या आकृतीचा असतो. आकृति ५१ पाहा. त्याचा पाया वर्तुळाकृति असून **अ** या ठिकाणीं शंकूचें शिर असतें. या ढिगांत एक काडी घालून **अक** उंची मोजतां येणें शक्य आहे पण तसे करणे व्यवहार्य नाहीं. कारण **अक** या ठिकाणीं एक बारीक काठीं घातल्यास ढिगाचा आकार थोडा तरी बदलेल. तीच गोष्ट त्रिज्येची. जमिनीवरून आडवी काठी ढिगांत घालून ती बरोबर **क** पर्यंत पोंचली कीं नाही हें बाहेरून दिसणार नाहीं. त्यापेक्षां दोरी घेऊन ढिगाचा परिघ मोजणें हेंच जास्त व्यवहार्य आहे. तथापि परिघ मिळाला तरी ढिगाची उंची परिघाचा कितवा हिस्सा असते ते ठाऊक पाहिजेच. या साठीं २२१ व्या श्लोकांत व्यवहारी भास्कराचार्यानें धान्यांचे तीन प्रकार कल्पिले आहेत. (१) ज्वारी, बाजरी, उडीद, वाटाणे इत्यादींचे दाणे स्थूल



आ. ५१

आकाराचे गोल असतात; त्यांना भास्कराचार्य अनणु म्हणतो. (२) खसखस, राजगिरा, तुळशीचें बीं, वरया इत्यादि अणु धान्ये लहान असतात व त्यांचा ढीग थोडा पसरट होतो. (३) साळी, गहूं, जवस इत्यादींचे दाणे टोंकदार (शूकाकृति) असतात. त्यांचा ढीग त्या मानानें उंच होतो. म्हणून प्रत्यक्ष अनुभवानें उंचीचे परिघाशीं प्रमाण व्यावहारिक घेतलें आहे.

आतां शंकूचें घनफळ $= \frac{१}{३} \pi \times$ त्रिज्या$^{२} \times$ उंची. हें सूत्र पूर्वीच सिद्ध केलें आहे.

भास्कराचार्यांच्या सूत्राप्रमाणें शंकूचे घनफळ $= \left(\frac{\text{परिघ}}{६}\right)^{२} \times$ उंची

$$= \left(\frac{२\pi \text{ त्रि}}{६}\right)^{२} \times \text{उंची} = \frac{\pi^{२} \text{त्रि}^{२}}{९} \times \text{उंची.}$$

हें सूत्र हल्लींच्या सूत्रापासून थोडें भिन्न आहे. पण भास्कराच्या सूत्रांत $\pi = ३$, सुमारें, असें धरलें तर

$$\text{शंकूचे घनफळ} = \frac{३ \times \pi \times \text{त्रि}^{२} \times \text{उंची}}{९} = \frac{१}{३} \pi \text{ त्रि}^{२} \times \text{उंची असें सूत्र येतें.}$$

गणित–दृष्टचा सूत्र किंचित् फरकाचें असलें तरी व्यवहार-दृष्टचा खेडेगांवातील लोकांना ते सुटसुटीत आहे. पेशवाईकाळांतही π ची किंमत ३ इतकी वापरीत होते.

उदाहरण

श्लोक २२२

समभुवि किल राशिर्यः स्थितः स्थूलधान्यः ।
परिधिपरिमितिर्भो हस्तषष्टिर्यदीया ।।
प्रवद गणक खार्यः किंमिताः संति तस्मिन् ।
अथ पृथगणुधान्ये शूकधान्ये च शीघ्रम् ।। २२२ ।।

अर्थ : सपाट जमिनीवर स्थूल धान्याचा एक ढीग रचला आहे. त्याचा परिघ ६० हात आहे तर, हे गणका, त्या ढिगांत किती खारिका धान्य आहे ? त्याचप्रमाणें जर ढीग अणु धान्याचा किंवा शूक धान्याचा असेल तर झटकन त्याचें माप सांग.
(खारिका = अजमासें ६ पायली.)

स्पष्टीकरण : परिघ = ६० हात. परिघ ÷ ६ = १० हात.

स्थूल-धान्याच्या ढिगाची उंची $= \frac{६०}{१०} = ६$ हात.

अणु-धान्याच्या ढिगाची उंची $= \frac{६०}{११}$ हात.

शूकधान्याच्या ढिगाची उंची = $\frac{६०}{९} = \frac{२०}{३}$ हात.

∴ स्थूल-धान्य राशीचें घनफळ = १०० × ६ = ६०० घनहस्त.

अणु धान्य राशीचें घनफळ = $\frac{१०० \times ६०}{११} = \frac{६०००}{११} = ५४५\frac{५}{११}$ घनहस्त.

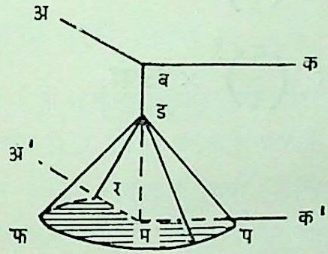
शूक राशीचें घनफळ = $\frac{१०० \times २०}{३} = \frac{२०००}{३} = ६६६\frac{२}{३}$ घनहस्त.

सूत्र : भिंतीशीं कोंपऱ्यांत ढीग करून ठेवलेला असल्यास.

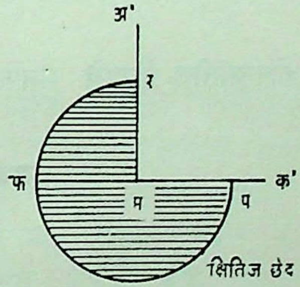
श्लोक २२३

द्विवेदसत्रिभागैकनिघ्नात्तु परिधेः फलम् ।
भित्त्यंतर्बाह्यकोणस्थराशेः स्वगुणभाजितम् ।। २२३ ।।

टीप : वरील श्लोकाचा अर्थ वाचण्याचे अगोदर सोबतच्या आकृती ५२ आणि ५३ पहा.

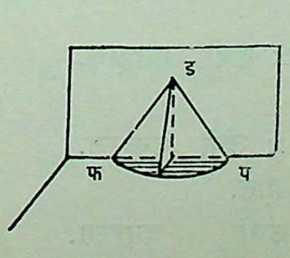


आ. ५२

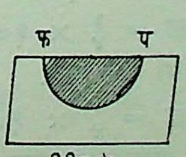


आ. ५३

समजा **अ'अब, बकक'** या खोलीच्या दोन भिंती आहेत. पुढे मोकळी ओसरी असून भिंतींच्या कोंपऱ्याशीं धान्याचा ढीग घातला आहे. आकृति ५२ मध्ये दाखविल्याप्रमाणें हा ढीग शंक्वाकृति असून आकृति ५३ मधील क्षितिज-छेद (ground plan) पाहिल्यास, त्याचा पाया $\frac{३}{४}$ वर्तुळ म्हणजे **पफर** एवढा आहे.

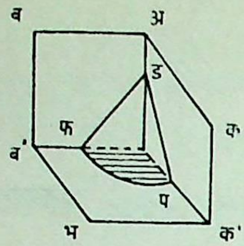


आ. ५४

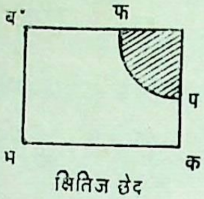


आ. ५५

जर धान्याचा ढीग एकाच भिंतीशी चिकटून घातला असेल तर त्याची आकृति अर्धशंकूप्रमाणें होईल व त्याचा क्षितिजछेद आकृति ५५ प्रमाणें होईल. अर्थात् ढिगाचा पाया अर्धवर्तुळ आहे.



आ. ५६



आ. ५७

आकृति ५६ मध्यें धान्याचा ढीग खोलीच्या आंत २ भितींच्या सांध्यांत घातला आहे. यावेळी ढीग शंकु-चतुर्थांश होईल. त्याचा पाया **पफ** (आ. ५६) एवढा होईल.

पफ हा वर्तुळखंड परिघाचा चौथा हिस्सा झाला.

अर्थ : (ओसरीवरच्या) भितींच्या वाहेरील कोपऱ्यांत ढीग घातला असेल तर वर्तुळाचा परिधि, ढिगाच्या तळाच्या लांबीस $\frac{४}{३}$ नें गुणून मिळतो. जर एकाच भितीशीं ढीग असेल तर परिघ तळलांबीच्या दुप्पट होतो. जर भितीच्या आंतील कोपऱ्यात ढीग असेल तर परिघ तळलांबीच्या चौपट होतो. अशा प्रकारें परिघ मिळवून जीं घनफळें येतील त्यांच्या $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$ पटी एवढें घनहस्त ढिगाचें घनफळ येईल.

स्पष्टीकरण : ओसरीवरील ढिगाचें घनफळ $= \frac{३}{४} \times \left(\frac{प}{६}\right)^२ \times$ उंची

भितीलगतच्या ढिगाचें घनफळ $= \frac{१}{२} \times \left(\frac{प}{६}\right)^२ \times$ उंची

भितींच्या कोंपऱ्यांतील ढिगाचे घनफळ $= \frac{१}{४} \times \left(\frac{प}{६}\right)^२ \times$ उंची.

उदाहरण

श्लोक २२४

परिधिर्भित्तिलग्नस्य राशेस्त्रिशत्करः सखे ।
अंतःकोणस्थितस्यापि तिथितुल्यकरः किल ॥
बहिःकोणस्थितस्यापि पंचघ्नवसंमिताः ।
तेषामाचक्ष्व मे क्षिप्रं घनहस्तान् पृथक् पृथक् ॥ २२४ ॥

स्पष्टीकरण : ओसरीवरच्या ढिगाचा पाया = ४५ हात.

∴ परिघ ६० हात. अर्थात् घनफळ = $\frac{३}{४}$ × १०० × उंची घनहस्त.

भितीस लागलेल्या ढिगाचा पाया ३० हात.

∴ परिघ ६० हात. अर्थात् घनफळ = $\frac{१}{२}$ × १०० × उंची घनहस्त.

ढीग दोन भितीच्या कोंपऱ्यांत असल्यास पाया १५ हात.

∴ परिघ ६० हात. ढिगाचें घनफळ $\frac{१}{४}$ × १०० × उंची घनहस्त.

अर्थात् उंचीचें प्रमाण धान्याच्या प्रकारावरून ठरवावें लागेल. (पृ. १५७ पाहा.)

प्रकरण ३९

छायाव्यवहार

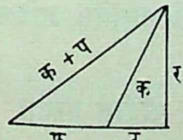
सूत्र : सूर्याच्या उन्हांत जमिनीस लंब अशी काठी जमिनीत रोंवल्यास तिच्या छायेची लांबी काढणें.

श्लोक २२५

> **छाययोः कर्णयोरन्तरे ये तयोः । वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीषवः ।।**
> **सैकलब्धेः पदघ्नं तु कर्णांतरम् । भांतरेणोनयुक्तं दले स्तः प्रभे ।।२२५।।**

अर्थ : छायांतराच्या वर्गांतून कर्णांतराचा वर्ग वजा करावा. नंतर ५७६स येणाऱ्या बाकीनें भागावें व त्यांत १ मिळवावा. या रकमेचें वर्गमूळ काढून त्याला कर्णांतरानें गुणावें. यांत छायांतर मिळवावें व वजा करावें आणि येणाऱ्या मूल्यांचीं अर्धें घ्यावीं म्हणजे दोन्ही छायांची लांबी मिळते.

स्पष्टीकरण : हें सूत्र सूर्याच्या उन्नतांशासंबंधीं आहे. त्यांत सूर्याच्या उन्नतिकोनांतला फरक कळण्यासाठीं कांहीं गणित करावें लागतें. त्यांत एक उंच शंक्वाकार काठी जमिनीवर टेंकून किंवा रोवून तिच्या टोंकाला बांधलेल्या दोरीनें सूर्याची दिशा कळण्यासाठीं जमिनीवर एकाच रेषेंत (शंकूच्या तळाशीं जाणाऱ्या) खुणा करतात व दोरी किती जास्त लागली तें माप व खुणांतलें अंतर मोजतात. शंकूची उंची दिली कीं शंकूच्या छाया मोजतां येतात.



आ. ५८

(आकृति ५८ पाहा) प्रथम सूत्राची सिद्धता करूं. समजा **र** ही शंकूची उंची आहे. **ट** आणि **ट+फ** ह्या छाया आहेत. **क** आणि **क+प** हे कर्ण आहेत. यांत **र, प, फ** दिलेले आहेत. तर **ट** काढणें.

काटकोनत्रिकोण सिद्धांतानें,

$(क + प)^{२} = र^{२} + (ट + फ)^{२}$ .... (१)

$क^{२} = र^{२} + ट^{२}$ .... (२)

(१) मधून (२) वजा केलें तर $२\,कप + प^{२} = २\,टफ + फ^{२}$ .... (३)

$\therefore २कप = २टफ + फ^{२} - प^{२}$.

वर्ग करून आणि $फ^{२} - प^{२} = म$ धरून, $४\,क^{२}प^{२} = (२टफ + म)^{२}$

$\therefore\quad ४प^{२}(र^{२}+ट^{२}) = ४ट^{२}फ^{२} + ४मफट + म^{२}.$

$\therefore\quad ४ट^{२}(फ^{२}-प^{२}) + ४मफट + म^{२} - ४प^{२}र^{२} = ०.$ हें द्विघात समीकरण सोडविलें, म्हणजेच $४मट^{२} + ४फमट + म^{२} - ४प^{२}र^{२} = ०$ हें सोडविलें, तर

$$ट = \frac{-४फम \pm \sqrt{१६म^{२}फ^{२} - १६म(म^{२} - ४प^{२}र^{२})}}{८म}$$

$$= -\frac{१}{२}फ \pm \frac{१}{२म}\sqrt{म^{२}फ^{२} - म^{३} + ४मप^{२}र^{२}}$$

पण करणीचिन्हांतन $म^{२}$ बाहेर खेंचल्यास

$$ट = -\frac{१}{२}फ \pm \frac{म}{२म} \times \sqrt{फ^{२} - म + \frac{४प^{२}र^{२}}{म}},$$ पण $म = फ^{२} - प^{२}$.

$$\therefore ट = -\frac{१}{२}फ \pm \frac{१}{२}\sqrt{फ^{२} - फ^{२} + प^{२} + \frac{४प^{२}र^{२}}{म}}$$

$$= -\frac{१}{२}फ \pm \frac{१}{२}\sqrt{प^{२} + \frac{४प^{२}र^{२}}{म}}$$

$$= -\frac{१}{२}फ \pm \frac{१}{२}प \times \sqrt{१ + \frac{४र^{२}}{म}}.$$ हें सूत्र सिद्ध झालें.

तथापि ट ची किंमत उणें येऊं नये म्हणून ज्यावेळीं करणीस उणें चिन्ह असेल त्यावेळीं उजव्या बाजूचें केवलमूल्य घ्यावें.

अर्थात् $ट = \frac{फ}{२} + \frac{प}{२} \times \sqrt{१ + \frac{४र^{२}}{म}}.$

जर $र = १२$, तर $ट = \frac{प}{२} \times \sqrt{१ + \frac{५७६}{म}} + \frac{फ}{२}.$

यास एकच अट आहे ती ही कीं $फ^{२} - प^{२}$ शुन्या पेक्षां मोठे असावेत, तसे ते आहेत असें गृहीत धरलें आहे.

सूत्र : दिव्याची उंची व शंकूची उंची दिली असतां व त्यांमधील अंतर माहीत असतां छायेची लांबी काढणें.

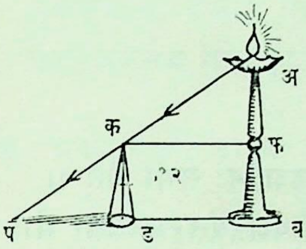
श्लोक २२६

शंकुः प्रदीपतलशंकुतलांतरघ्नः ।
छाया भवेत् विनरदीपशिखौच्चयभक्तः ।। २२६ ।।

अर्थ : (आकृति ५९ मध्ये) एक दिवा व एक शंकु दाखविले आहेत. दिव्याची व शंकूची उंची दिली आहे व त्यामधलें अंतर दिलें आहे. तर छायेची लांबी काय ?

[काही शब्दांचे अर्थ: नर = शंकु, बुध्दिबळांतील प्यादे; दीपशिखा = दिव्याची ज्योत; औच्च्य = उंची; वि = वजा करून; विनर = शंकूची उंची वजा करून; विनरदीप शिखौच्च्य = ज्योतीच्या उंचीतून शंकूची उंची वजा करून.]

स्पष्टीकरण : दिव्याचा तळबिंदु व शंकूचा तळबिंदु यांतील अंतरानें १२स गुणून त्यास दिवा व शंकु यांच्या उंचीतील फरकानें भागावें म्हणजे छाया मिळते.



आ. ५९.

(अफ = विनरदीपशिखौच्च्य)

$$\frac{\text{पड}}{१२} = \frac{\text{डब}}{\text{डब} - \text{कअ}}$$

कारण △ **पकड** आणि △ **कफअ** समरूप आहेत.

$$\therefore \text{पड} = \frac{१२ \times \text{डब}}{\text{अब} - \text{कड}}$$ हे सिद्ध.

उदाहरण

श्लोक २२७

शंकुप्रदीपांतरभूस्त्रिहस्ता । दीपोच्छ्रितिः सार्धकरत्रया चेत् ।।
शंकोस्तदाऽर्कांगुलसंमितस्य । तस्य प्रभा स्यात्कियती वदाऽऽशु ।। २२७ ।।

अर्थ : दिव्याचा तळबिंदु व शंकूचा तळबिंदु यांत ३ हात (७२ अंगुळें) अंतर आहे. दिव्याची उंची ३$\frac{१}{२}$ हात (८४ अंगुळें) आहे. जर शंकु १२ अंगुळें उंच असेल तर त्याची छाया किती ? (प्रभा = छाया.)

स्पष्टीकरण : छाया = $\frac{१२ \times ७२}{८४ - १२} = \frac{१२ \times ७२}{७२}$ = १२ अंगुळें हें उत्तर.

सूत्र : दिव्याची उंची काढणें.

श्लोक २२८

छायोद्धृते तु नरदीपतलांतरघ्ने ।
शंकौ भवेन्नरयुते खलु दीपकौच्च्यम् ।। २२८ ।।

अर्थ : [नर = शंकु, काठी; औच्च्य = उंची]
शंकू व दिवा यांच्यामधील अंतरास छायेनें भागावें. येणाऱ्या संख्येस शंकूनें गुणून त्यांत शंकूची उंची मिळवावी म्हणजे दिव्याची उंची येते.

स्पष्टीकरण : वरच्या श्लोक २२६ मधील समरूप त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{कफ}}{\text{पड}} = \frac{\text{अफ}}{\text{कड}}. \quad \therefore \quad \text{अफ} = \frac{\text{कफ} \times \text{कड}}{\text{पड}} = \frac{\text{बड} \times \text{कड}}{\text{पड}}$$

$$\therefore \quad \text{अब} = \frac{\text{बड} \times \text{कड}}{\text{पड}} + \text{कड} = \frac{(\text{दिवा व शंकु यांतलें अंतर})}{\text{छाया}} \times \text{शंकु} + \text{शंकु}.$$

उदाहरण

श्लोक २२९

प्रदीपशंक्वंतरभूस्त्रिहस्ता । छायांगुलैः षोडशभिः समा चेत् ।।
दीपोच्छ्रितिः स्यात्कियती वदाऽऽशु । प्रदीपशंक्वंतरमुच्यतां मे।। २२९ ।।

अर्थ : दिवा आणि शंकु यांच्या तळबिंदूंमधील अंतर ३ हात आहे. छाया १६ अंगुळें आहे, तर दिव्याची उंची काय व दिवा आणि शंकु यांतलें अंतर काय ?

स्पष्टीकरण : शंकूची उंची नेहमीं १२ अंगुळें समजावयाची. म्हणून श्लोकांत ती दिली नाहीं. २२८ श्लोकांतल्या सूत्राप्रमाणें

$$\text{दिव्याची उंची} = \frac{(\text{तळबिंदूमधलें अंतर}) \times \text{शंकू}}{\text{छाया}} + \text{शंकू}$$

$$= \frac{७२ \times १२}{१६} + १२ = ५४ + १२ = ६६ \text{ अंगुळें}$$

$$= \frac{६६}{२४} \text{ हात} = \frac{११}{४} \text{ हात.} \quad \text{हें उत्तर.}$$

सूत्र : शंकु व दिवा यांच्या तळबिंदूंतील अंतर काढण्याचें.

श्लोक २३०

विशंकुदीपोच्छ्र्यसंगुणा भा । शंकूद्धृता दीपनरांतरं स्यात् ।। २३० ।।

अर्थ : दिव्याच्या उंचीतून शंकूची उंची वजा करावी व बाकीस छायेनें गुणावें व शंकूच्या उंचीनें भागावें म्हणजे तळबिंदूंतील अंतर मिळतें. (भा = छाया)

स्पष्टीकरण : श्लोक २२६ मधील आकृति ५९ मध्ये, △ **पकड** △ **अकफ** समरूप आहेत. आणि **बड** = **फक**.

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{\text{कफ}}{\text{अफ}} = \frac{\text{पड}}{\text{कड}}. \quad \therefore \quad \text{बड} = \text{कफ} = \frac{\text{अफ} \times \text{पड}}{\text{कड}}$$

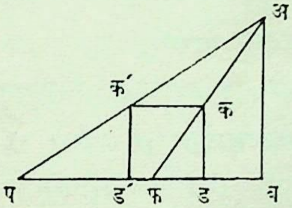
$$\therefore \quad \text{तळबिंदूतलें अंतर} = \frac{(\text{दिव्याची उंची} - \text{शंकु}) \times \text{छाया}}{\text{शंकु}}$$

सूत्र : शंकु दोन ठिकाणीं (दीपतळांतून जाणाऱ्या रेषेवर) ठेवला, तर छायांच्या लांब्या व स्थानांतर दिल्यास दिव्याची उंची व छाया काढणें.

श्लोक २३१, २३२

छायाग्रयोरंतरसंगुणा भा । छायाप्रमाणांतरहृद्भवेत् भूः ॥
भूशंकुघातः प्रभया विभक्तः । प्रजायते दीपशिखौच्च्यमेव ॥ २३१ ॥
त्रैराशिकेनैव यदेतदुक्तम् । व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम् ॥ २३२ ॥

स्पष्टीकरण : प्रथम आकृति ६० चा अभ्यास करूं. समजा **अब** हा दिवा आहे. **कड** हा १२ अंगुळें



आ. ६०

उंचीचा शंकु आहे. पण सूत्र सिद्ध करण्यास त्याची उंची कांहींही धरली तरी चालेल. हा शंकु, ड येथें ठेवला. त्याची, छाया **फड** दिली आहे. नंतर हा शंकु, **कड** येथून उचलून **बडफ** रेषेवरच **क'ड'** या ठिकाणीं ठेवला. त्याची छाया **पड'** ही दिली आहे. तसेंच **डड'** हें अंतर दिलें आहे. आतां दिव्याची उंची **अब**, आणि छायाग्रांची **ब**पासूनचीं अंतरें **बफ, बप** हीं काढणें.

येथें **कड** ठाऊक आहे. **फड** दिली आहे, **डड'** दिली आहे. ∴ **फड'** ठाऊक झाली. **पड'** दिली आहे. ∴ **पफ** हें छायाग्रांतर ठाऊक झालें.

आतां $\triangle$**फकड** व $\triangle$**फअब** समरूप. ∴ $\frac{\text{फब}}{\text{फड}} = \frac{\text{अब}}{\text{कड}}$ ... ... (१)

तसेंच $\triangle$**पक'ड'** व $\triangle$**पअब** समरूप. ∴ $\frac{\text{पब}}{\text{पड}} = \frac{\text{अब}}{\text{क'ड'}}$ ... ... (२)

पण **कड** = **क'ड'**. ∴ (१) व (२) वरून,

$$\frac{\text{फब}}{\text{फड}} = \frac{\text{पब}}{\text{पड'}} = \frac{\text{पब} - \text{फब}}{\text{पड'} - \text{फड}} = \frac{\text{छायाग्रांतर}}{\text{छायांतर}}.$$

$$\therefore \text{फब} = \frac{\text{छायाग्रांतर}}{\text{छायांतर}} \times \text{छाया फड}$$

आणि $\text{पब} = \frac{\text{छायाग्रांतर}}{\text{छायांतर}} \times \text{छाया पड'}$ हीं सूत्रें सिद्ध.

आतां दिव्याची उंची काढण्यास, समरूप त्रिकोण **फअब, फकड** यांत,

$\frac{\text{अब}}{\text{फब}} = \frac{\text{कड}}{\text{फड}}$. ∴ $\text{अब} = \frac{\text{छायाग्र} \times \text{शंकु}}{\text{छाया}}$, हें सूत्र झालें.

आकृतीचे स्पष्टीकरणानंतर आतां श्लोकाचा अर्थ सांगूं.

अर्थ : छायाग्रांमधील अंतरास पहिल्या छायेनें गुणावें व छायांतरानें भागावें म्हणजे पहिल्या छायाग्राचें (**ब** पासून) अंतर मिळतें. त्याचप्रमाणें दुसऱ्याचें समजावें. तसेंच छायाग्रास शंकूनें गुणून छायेनें भागलें म्हणजे दिव्याची उंची मिळते. या सर्व गोष्टी त्रैराशिकानेंच साध्य झाल्या आहेत. ज्याप्रमाणें परमेश्वराच्या भिन्न भिन्न स्वरूपांनीं विश्व व्याप्त आहे, त्याप्रमाणें छायाव्यवहार हा त्रैराशिकानें व्याप्त आहे.

टीप : 'दिव्याच्या प्रकाशांत शंकूची छाया व छायाग्रें मोजण्याचें प्रयोजन काय' हें छाया-व्यवहारावरून स्पष्ट होत नाहीं. एक गोष्ट स्पष्ट आहे कीं 'प्रकाशकिरण सरळरेषेंत प्रवास करतो' हें भौतिकशास्त्रांतलें तत्त्व त्या काळीं ठाऊक होतें. पण या तत्त्वाचा ज्योतिःशास्त्रांत काय उपयोग होता हें सांगितलेलें नाहीं.

उदाहरण

श्लोक २३३

शंकोर्भार्कमितांगुलस्य सुमते दृष्टा किलाष्टांगुला ।
छायाग्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः ॥
तस्यैवार्कमितांगुला यदि तदा छाया-प्रदीपांतरम् ।
दीपौच्च्यं च कियत् वद व्यवहृतिं छायाभिधां वेत्सि चेत् ॥ २३३ ॥

अर्थ : बारा अंगुळें उंचीच्या शंकूची छाया ८ अंगुळें पडली. तोच शंकू उचलून छायेच्याच दिशेनें २ हात पलीकडे सरकवून ठेवला, तेव्हां त्याची छाया १२ अंगुळें पडली. तर दिव्यापासून छायाग्रें किती अंतरावर आहेत व दिव्याची उंची काय आहे; हें, हे हुशार मुला, तुला जर छायाव्यवहार ठाऊक असेल, तर सांग.

स्पष्टीकरण : (आकृती ६०. २३१, २३२ श्लोकांची).

फड = ८, **डड'** = ४८, **फड'** = ४० **पड'** = १२.

∴ **पफ** = ५२ हें छायाग्रांतर. छायांतर = १२ − ८ = ४.

∴ **फब** = छायाग्र १ = $\frac{५२ \times ८}{४}$ = १०४,

आणि **पब** = छायाग्र २ = $\frac{५२ \times १२}{४}$ = १५६.

दिव्याची उंची = $\frac{१०४ \times १२}{८}$ = १५६ अंगुळें, हें उत्तर

श्लोक २३४

> यत्किंचिद्गुणभागहारविधिना बीजेऽत्र वा गण्यते ।
> तत् त्रैराशिकमेव निर्मलधियामेवावगम्यं विदाम् ।।
> एतद्यत् बहुधाऽस्म दादि जडधीधीवृद्धिबुद्ध्या बुधैः ।
> तद्भेदान् सुगमान्विधाय रचितं प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम् ।। २३४ ।।

अर्थ : अंकगणितांत व बीजगणितांत जें गणित भागाकार व गुणाकारांनीं युक्त असतें तें सर्व त्रैराशिकरूप असतें, हें विद्वान् लोक जाणतात. आमच्या सारख्या मंदबुद्धि लोकांची आकलनशक्ति वाढावी या हेतूनेंच, हें त्रैराशिकगणित, त्यांतील सर्व प्रकार सोपे करून, संकीर्ण उदाहरणांसह शहाण्या लोकांनीं रचलें आहे.

स्पष्टीकरण : या श्लोकांत त्रैराशिकाचें महत्त्व वर्णन केलें आहे. हल्लीं अंकगणित शिकवितांना एकमानपद्धतीचा वापर चालू आहे, त्यामुळें निष्कासनक्रियेंत झटपटपणा येत नाहीं.

टीप : हा श्लोक भास्कराचार्याचा असावा असें वाटत नाहीं. तो स्वतःला मंदधी म्हणणें असंभवनीय वाटतें.

प्रकरण ३२

कुट्टक व्यवहार

या व्यवहारांतील भास्कराचार्याची रीत समजून घेण्याचें पूर्वीं कुट्टक म्हणजे काय तें पाहूं.

समजा एकाद्या बैजिक समीकरणांत $\frac{\text{अक्ष} + \text{ब}}{\text{क}} = \text{य}$ आहे, व **अ**, **ब**, **क** पूर्णांक दिले आहेत. जर **क्ष**, **य** हे देखील पूर्णांक असतील तर **क्ष** पूर्णांक धरून **अक्ष+ब** याला **क** नें भागल्यास, भागाकार पूर्णांक येईल, म्हणजेच **क**नें **अक्ष+ब** याला निःशेष भाग लागेल; तर, अशा समीकरणांस कुट्टक असें म्हणतात. कुट्टक म्हणजे कुटणें, प्रश्नाचें पीठ पाडणें.

वरील समीकरण, **अक्ष + ब = कय** असेंही लिहितात. यांत **क्ष**, **य** प्रथम घाताचे असले म्हणजे त्यास डायोफंटसचें प्रथम-घाती समीकरण असेंही म्हणतात.

कुट्टक सोडवायचें म्हणजे काय करावयाचें तें समजण्यासाठी भास्कराचार्याचेंच एक उदाहरण घेऊं.

श्लोक २३४ अ

> शतं हतं येन युतं नवत्या । विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्ट्या ।।
> निरग्रकं स्यात् वद मे गुणं तं । स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ।।२३४।।

अर्थ : एका संख्येस १०० नें गुणून त्यांत ९० मिळविले किंवा वजा केले व येणाऱ्या रकमेस ६३ नें भागलें असतां शून्य बाकी राहाते. तर ती संख्या कोणती ?

हें समीकरण $\frac{१००क्ष \pm ९०}{६३} = य$ असें दोन प्रकारचें झालें.

तें $१००क्ष - ६३य = \pm ९०$ असेंही लिहितां येईल.

त्यांतलें $\frac{१००क्ष + ९०}{६३} = य$ हें विचारार्थ घेऊं. ... ... (१)

यांत १०० ला भाज्य, ६३ ला हार, ९० ला क्षेपक, **क्ष** ला गुण व **य** ला लब्धि अशी भास्कराचार्यांची पारिभाषिक नांवें आहेत.

समीकरण (१) $१००क्ष - ६३य = -९०$ आहे. समजा ह्या समीकरणांत दोन लागोपाठचीं उत्तरें $क्ष_र$, $य_र$; आणि $क्ष_{र+१}$, $य_{र+१}$ अशीं आहेत.

तर $१००क्ष_{र+१} - ६३य_{र+१} = -९०$ ... ... (२)

आणि $१००क्ष_र - ६३य_र = -९०$ ... ... (३)

(२) मधून (३) वजा करून, $१०० (क्ष_{र+१} - क्ष_र) = ६३ (य_{र+१} - य_र)$.

पण १०० व ६३ परस्पर अविभाज्य व कंसांतील अंक लघुतम आहेत.

$\therefore$ $क्ष_{र+१} - क्ष_र$ हे ६३ झाले. आणि $य_{र+१} - य_र = १००$ झाले.

यावरून असें सिद्ध होतें कीं, **क्ष** मालिका गणितश्रेढी असून तिचा चय ६३ आहे. आणि **य** मालिका गणितश्रेढी असून तिचा चय १०० आहे. आतां या श्रेढींची आदिधनें (प्रथम पदें) **क्ष** व **य** आहेत असें समजूं.

समीकरण (१) घेऊं. त्यांत $१००क्ष - ६३य = -९०$.

यास ९० नें भागून, $\frac{१०क्ष}{९} - \frac{७य}{१०} = -१$ किंवा $\frac{१०क्ष}{९} = \frac{७य}{१०} - १$.

अर्थात, **क्ष** ही नवाच्या पटींतली संख्या आहे व **य** ही १० च्या पटींतली संख्या आहे. पण **य** अशीही पाहिजे कीं $\frac{य}{१०}$ नें ७ ला गुणून १ वजा केला म्हणजे $\frac{७य}{१०} - १$ याला १० नें भाग जाईल.

अर्थात, $य = ३०$ घेतल्यास $\frac{७य}{१०} - १ = २१ - १ = २०$,

आणि $२०क्ष = ९ \times २० = १८०$

$\therefore$ $क्ष = १८$. अर्थात्, गुण = १८ आणि लब्धि = ३०.

आणि $१०० \times १८ - ६३ \times ३० = १८०० - १८९० = -९०$, हें बरोबर.

$\therefore$ गुणांची श्रेढि = १८, ८१, १४४, २०७, ...

व लब्धींची श्रेढि = ३०, १३०, २३०, ३३०, ...

दुसऱ्या समीकरणांत १००क्ष − ६३य = ९०.
पूर्वीप्रमाणेंच, १०० $(क्ष_{र+1} - क्ष_{र})$ = ६३ $(य_{र+1} - य_{र})$.

∴ क्ष मालिकेचा चय ६३, आणि य मालिकेचा चय १००.

समजा, क्ष, य हीं आदिधनें आहेत. तर १०० क्ष = ६३ य + ९०.

पूर्वीप्रमाणेंच ९० नें भागून, $\frac{१०क्ष}{९} = \frac{७य}{१०} + १$.

आतां य ला १० नें भाग तर गेलाच पाहिजे, पण $\frac{य}{१०}$ नें ७ ला गुणून जी संख्या येईल तिच्यांत १ मिळवून येणाऱ्या संख्येसही १० नें भाग गेला पाहिजे, आणि क्ष ही नवाची पट असली पाहिजे. अर्थात य = ७० पाहिजे.

म्हणजे $\frac{१०क्ष}{९}$ = ४९ + १ = ५०. ∴ क्ष = ९ × ५ = ४५.

∴ गुण ४५ व गुणांची श्रेढि ४५, १०८, १७१, २३४, ...
आणि लब्धि ७० व लब्धींची श्रेढि ७०, १७०, २७०, ३७०, ...

आतां भास्कराचार्यानें जी रीत दिलेली आहे तिचें स्वरूप पाहूं व अर्वाचीन कुट्टकांच्या रीतीशीं तिची तुलना करूं. येथें हें लक्षांत ठेवावें कीं क्षेपक धन असेल तर जे गुण, लब्धि येतात ते व क्षेपक ऋण असेल तर जे गुण, लब्धि येतात ते परस्पर पूरक असून $गुण_२$ = हार − $गुण_१$ व $लब्धि_२$ = भाज्य − $लब्धि_१$ येतात.

आतां भास्कराचार्याची रीत पाहूं.

श्लोक २३५, २३६, २३७, २३८, २३९,

भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः । केनाप्यादौ संभवे कुट्टकार्थम् ।।
येन च्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन । क्षेपश्चैतद्दुष्टमुद्दिष्टमेव ।। २३५ ।।
परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः । शेषस्तयोः स्यादपवर्तनं सः ।।
तेनापवर्तेन विभाजितौ यौ । तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः ।। २३६ ।।
मिथो भजेत्तौ दृढभाज्यहारौ । यावत् विभाज्ये भवतीह रूपं ।।
फलान्यधोधस्तदधो निवेश्य । क्षेपस्ततः शून्यमुपांतिमेन ।। २३७ ।।
स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यम् । त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मम् ।।
ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः । फलं गुणो स्यादधरो हरेण ।। २३८ ।।
एवं तदैवात्र यदा समास्ताः । स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम् ।।
यदागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ । स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः ।।२३९।।

शब्दार्थ : अपवर्त्य = भागण्यास योग्य; दुष्ट = अयोग्य; रूप = १; अधोधः = एकाखालीं एक; उपांतिम = शेवटच्याच्या अलीकडील; तष्ट = भागलेला; अधर = खालचा.

अर्थ : दिलेल्या समीकरणांत भाज्य, हार व क्षेपक या सर्वांनाच एखाद्या संख्येनें भाग जाईल तर तें समीकरण ठीक समजावें व सर्व पदांना त्यांच्या महत्तम साधारण विभाजकानें म्हणजे दृढभाजकानें भागून समीकरण असें तयार करावें कीं दिलेल्या अंकांत सामान्य अवयव असणार नाहीं. तथापि भाज्य व हार यांच्या दृढभाजकानें (एकाखेरीज) क्षेपकास भाग जाणार नाहीं तर उदाहरण दुष्ट म्हणजे अयोग्य समजावें.

प्रथम भाज्य व हार यांचा दृढभाजक काढावा. तो अर्थातच १ असणार. कारण १ नसेल तर त्यानें क्षेपकास भाग जाईल; व भागून भाज्य व हार व क्षेपक दृढ होतील.

या दृढ भाज्यास दृढ हारानें भागून शेष १ राहीपर्यंत भागण्याची क्रिया करावी. नंतर सर्व भागाकार एकाखालीं एक मांडून त्या खालीं क्षेपक व त्याच्या खालीं ० मांडावें. या ओळीस ऊर्ध्वाधर पंक्ति किंवा वल्ली म्हणतात. नंतर उपान्तिमाने त्याच्या डोक्यावरच्या अंकास गुणावें व त्यांत त्या खालचा अंक मिळवून उपांतिमावर ती संख्या लिहावी व ऊर्ध्व अंक व अंत्यांक पुसून पंक्ति लहान करावी. असें पुन्हांपुन्हां करून २ राशि शिल्लक राहीपर्यंत ही क्रिया करावी. नंतर दोन राशींपैकीं जी ऊर्ध्व म्हणजे वरची आहे तिला भाज्यानें भागून जे शेष राहील ती लब्धि; म्हणजे **य** ची किंमत झाली. तसेंच जी अधर म्हणजे खालची राशि तिला हारानें भागून जो शेष राहील तो गुण म्हणजे **क्ष** ची लघुतम किंमत होय.

यांत फक्त पुढील बदल करावे लागतील. वल्लींतील भागाकारांची संख्या २ नें भाग जाणारी असेल व क्षेपक धन असेल तर येणाऱ्या बाक्या या, अनुक्रमें, लब्धि व गुण होतील. तसेंच वल्लींतील भागाकारांची संख्या सम पण क्षेपक ऋण असेल तर (भाज्य – प्रथम लब्धि) व (हार – प्रथम गुण) हें, अनुक्रमें, लब्धि व गुण होतील.

[वल्लींतील भागाकारांची संख्या विषम व क्षेपक धन असेल तर (भाज्य – प्रथम-लब्धि) ही लब्धि होईल; तसेंच (भाज्य – प्रथम गुण) हा गुण होईल. भागाकाराची संख्या विषम व क्षेपक ऋण असेल तर मूळचे गुणलब्धि बरोबर असतील].

स्पष्टीकरण : आतां भास्करीय पद्धतीनें पहिलें समीकरण सोडवूं.

समीकरण १००**क्ष** – ६३**य** = –९० असें घेऊं. यांत भाज्य १०० व हार ६३. यांचा दृढभाजक काढूं. (आकृति ६१ पाहा)

१	६३	१००	१
२	२६	३७	१
१	४	११	२
	१	३	

आ. ६१

यांत १ बाकी राहीपर्यंत तोंडी भागाकार करून एका पुढच्या एक बाक्या मधल्या स्तंभांत व एका पुढचे एक भागाकार उजवीकडे, डावीकडे, पुन्हां उजवीकडे, पुन्हां डावीकडे या क्रमानें लिहिले. असे एकूण ६ भागाकार (समसंख्याक), अनुक्रमें, १, १, १, २, २, १ अशी ओळ देतात.

हीच ओळ उभी लिहून तिच्याखालीं क्षेपक ९० व त्याखालीं ० लिहून एक उभी ओळ बनविली. (आकृति ६२ पहा)

१	२४३०
१	१५३०
१	९००
२	६३०
२	२७०
१	९०
३०	×
०	×

आ. ६२

९० नें वरच्या १ ला गुणून त्यांत ० मिळवून आलेले ९० उजव्या पंक्तींत तळाशीं लिहिले. नंतर या ९० नें २ ला गुणून त्यांत खालचे ९० मिळविले तेव्हां २७० झाले. ते ९० च्या डोक्यावर लिहिले. या प्रमाणें वरची रास ६३०, त्याचेवर ९००, त्याचेवर १५३० व त्याचेवर २४३० या राशि आल्या. यांतील वरच्या दोन म्हणजे २४३० आणि १५३० यांना ऊर्ध्व व अधर राशि म्हणतात. त्यांतल्या २४३० ला १०० नें भागून बाकी ३० राहिली. ही लब्धि. तसेंच १५३० ला ६३ नें भागून बाकी १८ राहिली. हा गुण.

आणि $१०० \times १८ - ६३ \times ३० = १८०० - १८९० = -९०$ हें सिद्ध.

अर्थात्. गुण मालिका १८, ८१, १४४, २०७ ....इत्यादि.
व लब्धि मालिका ३०, १३०, २३०, ३३० ......इत्यादि.

जर समीकरण १०० **क्ष** − ६३ **य** = ९० असें असतें, तर पंक्ति तीच, ऊर्ध्व, अधर तेच व बाक्या ३०, १८ याच येतील. पण क्षेप −९० झाला.

∴ १०० − ३० = ७० ही लब्धि व ६३ − १८ = ४५ हा गुण.
आणि गुण मालिका ४५, १०८, १७१...........
व लब्धि मालिका ७०, १७०, २७०,............ या प्रमाणें.
म्हणून भास्कराचार्यांची रीत सिद्ध.

आतां पंक्तींत विषम भागाकार असतील तर समीकरण कसें सुटतें तें पाहूं.

श्लोक २४०

यद्गुणा क्षयगषष्टिरन्विता । वर्जिता च यदि वा त्रिभिस्ततः ।।
स्यात्त्रयोदशहृता निरग्रका । तं गुणं गणक मे पृथग्वद ।। २४० ।।

अर्थ : ज्या गुणकास −६० नें गुणून त्यांत ३ मिळवून अथवा वजा करून १३ नें भागल्यास निःशेष भाग जातो तो गुण काय ? (क्षयग = ऋण)

स्पष्टीकरण : प्रथम आपण $\frac{६०\text{क्ष} + ३}{१३}$ = **य** हें समीकरण घेऊं. ६० व १३ ची पंक्ती तयार करूं. यांत लब्धि ४, १, १, १, १ (विषमसंख्याक) आल्या.

१	१३	६०	४
१	५	८	१
	२	३	१
		१	

आ. ६३

यांत क्षेप ३ घालून व खालीं ० लिहून राशि पंक्ती (आकृती ६३, ६४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणें) तयार झाल्या. येथें ऊर्ध्व ६९ व अधर १५. ऊर्ध्वास ६० नें भागून बाकी ९, तसेंच अधरास १३ नें भागून बाकी २. पण लब्धि संख्या विषम (५). म्हणून,
लब्धि = ६० − ९ = ५१. तसेंच गुण संख्या १३ − २ = ११.

४	६९
१	१५
१	९
१	६
१	३
३	×
०	×

आ. ६४

हेंच समीकरण $\frac{६०क्ष - ३}{१३}$ = **य** असें असतें तर,

गुण २ व लब्धि ९ झाली असती. आतां ताळा करून

$\frac{६० \times ११ + ३}{१३} = \frac{६६३}{१३}$ = ५१ आणि $\frac{६० \times २ - ३}{१३} = \frac{११७}{१३}$ = ९.

म्हणून २३९ श्लोकांतला नियम पूर्णपणें सिद्ध झाला.

उदाहरण

श्लोक २४१

एकविंशतियुतं शतद्वयम् । यद्‌गुणं गणक पंचषष्टियुक् ।।
पंचवर्जितशतद्वयोध्दृतम् । शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तत् ।। २४१ ।।

अर्थ : हे गणका, असा गुण सांग कीं त्याला २२१ नें गुणून, त्यांत ६५ मिळवून, १९५ नें भाग दिल्यास निःशेष भाग जातो ?

स्पष्टीकरण : या कुट्टकाचें समीकरणांत रूपांतर केल्यास तें $\frac{२२१क्ष + ६५}{१९५}$ = **य** असें होतें.

यांत क्षेप, हार व भाज्य या सर्वांना १३ नें भाग जातो.

म्हणून १३ नें भाग देऊन दृढ समीकरण $\frac{१७क्ष' + ५}{१५}$ = **य**' असें झालें.

यांत १७ व १५ यांचा दृढभाजक करून भागाकार पंक्ति १, ७ ही आली. व ऊर्ध्व अधर राशि अनुक्रमें ४०, ३५ आल्या. यांना भाज्य १७ व हार १५ यांनीं भागून लब्धि ६ व गुण ५ आले. आतां पंक्ति समसंख्याक आली. (आकृती ६५ पाहा)

१	४०
७	३५
५	×
०	×

आ. ६५

∴ गुण ५ व लब्धि ६ बरोबर. पण या किंमती **क्ष**', **य**' यांच्या.
क्ष, य यांच्या किंमती देखील ५, ६ च होतील.
गुणांची श्रेढि ५, २०, ३५, ५० .... अशी होईल. व
लब्धींची श्रेढि ६, २३, ४०, ५७ .... अशी होईल.

उदाहरण

श्लोक २४२

भवति कुट्टकविधेर्युतिभाज्ययोः । समपवर्तितयोरथवा गुणः ।।
भवति यो युतिभाजकयोः पुनः । स च भवेदपवर्तन-संगुणः ।। २४२ ।।

अर्थ : ज्या वेळीं कुट्टकांतील भाज्य व क्षेप या दोघांना एक सामान्य अवयव असेल व त्या अवयवानें भागून आलेलें कुट्टक नेहमींच्या पद्धतीनें सोडविलें असेल तर, गुण तोच येतो पण लब्धि निराळी येते. मूळच्या कुट्टकाची लब्धि काढण्यासाठीं नवीन लब्धीला ज्यानें क्षेप व भाज्य यांना भागलें होतें त्या अपवर्तनांकानें गुणावें.

स्पष्टीकरण : आपण प्रथम सोडविलेलें, श्लोक २३४ अ यांतील, उदाहरण घेऊं.

तें असें. $\frac{१००क्ष+९०}{६३} = \textbf{य}$. यांत भाज्य व क्षेप यांना १० नें भाग जातो.

१० नें भागून समीकरण $\frac{१०क्ष+९}{६३} = \textbf{य}' = \frac{\textbf{य}}{१०}$.

आतां १० भाज्य व हार ६३ यांची लब्धि मालिका ०, ६, ३.

म्हणून ऊर्ध्व २७, अधर १७१. (आकृती ६६ पाहा)

०	२७
६	१७१
३	२७
९	x
०	x

आ. ६६

२७ ला १० नें भागून बाकी ७.

१७१ ला ६३ नें भागून बाकी ४५.

यांत ७ × १० ही लब्धि व ४५ हा गुण.

पण पंक्तींत तीनच भागाकार आहेत.

∴ लब्धि १०० − ७० = ३० व गुण ६३ − ४५ = १८.

उदाहरण

श्लोक २४३

क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे ।।२४३।।

अर्थ : वरील सर्व रीती क्षेप धन असतो त्यावेळीं लागतात. जर क्षेप ऋण असेल तर पहिले गुण, लब्धि, अनुक्रमें हार व भाज्य यांतून वजा केले म्हणजे योग्य ते गुण लब्धि प्राप्त होतात. (आप्ति = लब्धि).

उदाहरण

श्लोक २४४

यद्‌गुणा गणक षष्टिरन्विता । वर्जिता च दशभिः षडुत्तरैः ।।
स्यात् त्रयोदशहृता निरग्रका । तद्‌गुणं कथय मे पृथक् पृथक् ।।२४४।।

अर्थ : ज्या गुणास ६० नें गुणून त्यांत १६ मिळविले किंवा वजा केले व १३ नें भागलें तर निःशेष भाग जातो तर तो गुण सांग.

स्पष्टीकरण : क्षेप अधिक घेतला म्हणजे समीकरण $\frac{६०क्ष + १६}{१३}$ = **य** असें झालें.

यांत क्षेप १६ हा हार १३ पेक्षां मोठा आहे. ∴ $\frac{६०क्ष + ३}{१३}$ = **य** − १ = **य**′.

यांत श्लोक २४० प्रमाणें गुण ११ व लब्धि **य**′ = ५१.

∴ मूळ समीकरणांत लब्धि ५२.

त्याच प्रमाणें जर समीकरण $\frac{६०क्ष - १६}{१३}$ = **य** असेल तर,

श्लोक २४० प्रमाणें, तें $\frac{६०क्ष - ३}{१३}$ = **य** + १ = **य**′ असें होईल.

म्हणून, गुण २ आणि लब्धि **य**′ = ९. ∴ **य** = ८ हें उत्तर.

उदाहरण

श्लोक २४५

येन संगुणिताः पंच त्रयोविंशतिसंयुताः ।
वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राः स्युः स को गुणः ॥२४५॥

अर्थ : असा कोणता गुण आहे कीं त्याला पांचनें गुणून त्यांत २३ मिळवले अथवा वजा केले आणि ३ नें भागलें तर निःशेष भाग जाईल ?

स्पष्टीकरण : वरील उदाहरणाचें समीकरण $\frac{५क्ष \pm २३}{३}$ = **य** असें झालें. ... . (१)

हेंच समीकरण $\frac{५क्ष \pm २}{३}$ = **य** ∓ ७ = **य**′ असेंही लिहितां येईल. .... (२)

आतां येथें भाज्य ५, हार ३, क्षेप २ आहे. दृढभाजकांतल्या लब्धि १, १ अशा समसंख्याक आहेत.

∴ पंक्ति १, १, २, ० अशी झाली. आणि ऊर्ध्व अधर राशि ४, २ झाल्या. यांना ५, ३ नें भागून लब्धि ४, गुण २ आले. म्हणून गुण २ व लब्धि **य**′ = ४, हें दुसऱ्या समीकरणाचें उत्तर. पहिल्या समीकरणांत गुण २ व लब्धि ९.

तसेंच समीकरण $\frac{५क्ष - २३}{३}$ = **य** असें घेतलें, ... (१)

तर तें $\frac{५क्ष - २}{३}$ = **य** + ७ = **य**′ असें लिहितां येईल .... (२)

यांत लब्धि (५ − ४) व गुण (३ − २) आले कारण क्षेपक ऋण आहे. म्हणून समीकरण (२) मध्यें गुण १, लब्धि १ आले.

अर्थात् समीकरण (१) मध्यें गुण १, लब्धि – ६ येतात.

येथें गुण श्रेढी १, ४, ७, १०, ... व लब्धि श्रेढी – ६, – १, ४, ९, ... येते.

यांतले ७ गुण व ४ लब्धि हे दोन्ही धन आहेत. ∴ गुण ७ व लब्धि ४ हें उत्तर.

सूत्र : क्षेप शून्य असता गुण व लब्धि काढणे.

श्लोक २४६

> **क्षेपाभावे तथा यत्र क्षेपः शुद्ध्येत् हरोद्धृतः ।**
> **ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलम् ।।२४६।।**

अर्थ : ज्या कुट्टकांत क्षेप नाहीं म्हणजे शून्य आहे त्यांत, किंवा ज्याच्या क्षेपास हारानें निःशेष भाग जातो त्यांत, गुण शून्य असतो आणि क्षेपास हारानें भागून लब्धि मिळते.

वरील नियम अगदीं स्पष्ट आहे. त्याचें उदाहरण घेऊं.

उदाहरण

श्लोक २४७

> **येन पंचगुणिताः खसंयुताः । पंचषष्टिसहिताश्च ते ऽथवा ।।**
> **स्युस्त्रयोदशहृता निरग्रकाः । तं गुणं गणक कीर्तयाशु मे ।।२४७।।**

अर्थ : असा कोणता गुण आहे कीं ज्याला ५ नें गुणून त्यांत ० मिळवून १३ नें भागल्यास भाग निःशेष जातो ? तसेंच ज्या गुणास ५ ने गुणून त्यांत ६५ मिळविले व १३ नें भागलें तर भागाकार निःशेष होतो तो गुण झटकन ऐकीव.

स्पष्टीकरण : पहिल्याचें समीकरण $\frac{५\text{क्ष}+०}{१३} = \text{य}$.

यांत क्षेप ० आहे, म्हणून गुण ० व लब्धि शून्य.

कारण ५**क्ष** = १३**य** यांत **क्ष**, **य** च्या कमींत कमी किंमती शून्य.

अर्थात, गुण-श्रेढि ०, १३, २६ ...... इत्यादि व लब्धि-श्रेढि ०, ५, १० ...... इत्यादि.

जर आपण ० ला अधिक पूर्णांक धरणार नाहीं, तर गुण १३, लब्धि ५ हें उत्तर ग्राह्य होईल.

दुसरें समीकरण $\frac{५\text{क्ष}+६५}{१३} = \text{य}$.

हेंच समीकरण $\frac{५\text{क्ष}}{१३} = \text{य} - ५ = \text{य}'$ असें लिहितां येईल. म्हणजे लब्धि **य′** धरल्यास गुणांची श्रेढि ०, १३, २६ .... वगैरे व लब्धींची श्रेढी ०, ५, १० .... होईल. आणि **य** ची श्रेढी ५, १०, १५ .... अशी होईल.

म्हणून गुण व लब्धि ०, ५. पण शून्य धन न धरल्यास गुण १३, लब्धि ५ हें उत्तर. अर्थात् २४६ श्लोकांतला नियम सिद्ध झाला.

सूत्र : क्षेप १ असता गुण, लब्धि काढणे.

श्लोक २४८

क्षेपं विशुद्धिं परिकल्प्य रूपं ।
पृथक् पृथग्ये गुणकारलब्धी ॥
अभीप्सित–क्षेपविशुद्धनिघ्ने ।
स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ॥२४८॥

अर्थ : प्रथम दिलेल्या कुट्टकांत क्षेप ± १ आहे असें समजून मुख्य रीतीनें गुण व लब्धि काढावे. जर क्षेप ± १ पेक्षां निराळा असेल तर या निराळचा क्षेपानें वरील गुण व लब्धीस गुणावें व त्यांना अनुक्रमें हार व भाज्य यांनीं भागावें म्हणजे ज्या बाक्या राहातील ते त्या क्षेपाचे गुण, लब्धि होतील.

स्पष्टीकरण : समजा आपण २४१ श्लोकांतलें उदाहरण घेतलें.

त्यांत $\frac{१७क्ष+५}{१५}$ = **य** आहे. येथें मुळांतच समीकरण $\frac{१७क्ष+१}{१५}$ = **य**′ धरूं.

यांत पंक्ति १, ७ आली व राशि काढण्यासाठीं हें कोष्टक (आकृति ६७) मांडलें.

१	८
७	७
१	×
०	×

आ. ६७

यांत ८ ला १७ नें भागून बाकी ८ आली, व ७ ला १५ नें भागून बाकी ७ आली. म्हणून क्षेप १ असतां गुण ७ व लब्धि ८ आली. आतां क्षेप ५ असेल तर ५×७=३५ व ५×८=४०. यांत ३५ ला १५ नें भागून बाकी ५ हा गुण. आणि ४० ला १७ नें भागून बाकी ६ ही लब्धि. याचप्रमाणें निरनिराळे क्षेप असतां गुण व लब्धि मिळतील.

टीप : वाचकांच्या लक्षांत येईल कीं मुख्य रीतींत पंक्ति तयार केल्यानंतर सर्वांत खालच्या लब्धीच्या खालीं गुणक लिहिला जात होता. (२४० श्लोक, उदाहरण पहा). तेथें ऊर्ध्व व अधर राशी या क्षेपाच्या पटींतच होत्या. पण वरच्या रीतींत क्षेप १ धरल्यानें, ज्या गुण, लब्धी आल्या त्यांना नंतर क्षेपानें गुणून पूर्वोक्त रीतीनें गुण लब्धि मिळविले.

कुट्टकाचा उपयोग अहर्गण व ग्रहभगण वगैरे मोजण्यांत प्रामुख्यानें होतो. याचें वर्णन येथें दिलें नाहीं. तें वाचकांनीं भास्कराचार्यांच्या बीजगणितांत, गणिताध्यायांत किंवा डॉ. सत्यप्रकाश यांच्या ‘ Founders of Indian Sciences ’ या ग्रंथांत पाहावें.

उपपत्ति

भाग १

कुट्टक सोडविण्याच्या आधुनिक रीतीवरून भास्कराचार्याचें सूत्र सिद्ध करूं. यांत तीन प्रकारच्या समीकरणांचा प्रामुख्यानें विचार होतो. त्यांतलें पहिलें **अक्ष — बय** = ± **क**. यांत **अ**, **ब**, **क** धन पूर्णांक धरून **क्ष**, **य** यांच्या लघुतम धन किंमती काढणें हें उद्दिष्ट आहे

समजा **क** १ आहे असें धरलें तर **अक्ष — बय** = ±१ हा पहिला प्रकार झाला.

आतां $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ या अपूर्णांकाला 'सतत अपूर्णांक' (continued fraction) बनविल्यास त्याचा जो 'उपान्त्य अभिसारक' (convergent) येतो, $\left(\text{समजा } \frac{\text{प}}{\text{फ}}\right)$, त्याचा गुणधम असा आहे कीं **अफ — बप** = ± १.

वरील नियमाची सत्यता पडताळून पाहाण्यासाठीं आपण $\frac{१००\text{क्ष}+१}{६३} = \text{य}$....(A1) हें समीकरण घेऊं.

येथें $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{१००}{६३} = १\frac{३७}{६३} = १ + \frac{१}{\frac{६३}{३७}} = १ + \cfrac{१}{१+\frac{२६}{३७}}$

$$= १ + \cfrac{१}{१+\cfrac{१}{\frac{३७}{२६}}} = १ + \cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\frac{११}{२६}}} = १ + \cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२+\frac{४}{११}}}}$$

$$\left.\begin{aligned} &= १ + \cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२+\frac{३}{४}}}}} = १ + \cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{१+\frac{१}{३}}}}}} \end{aligned}\right\} \ldots\text{(A)}$$

याप्रमाणें तळचा अपूर्णांक १ अंशाचा होईपर्यंत क्रिया केली असतां उजव्या बाजूस जो शिडीसारखा अपूर्णांक झाला त्याला 'सतत अपूर्णांक' म्हणतात. या अपूर्णांकावर पुन्हां

उलट क्रिया केली तर अर्थातच मूळ अपूर्णांक $\frac{१००}{६३}$ हा येईल. यांत उजवीकडे अधिक चिन्हांच्या मागें जी पूर्णांकाची मालिका आहे ती १, १, १, २, २, १ अशी समसंख्याक आहे. या आंकडचांना भागाकार (लब्धि) असें म्हणतात. नवीन पद्धतींत, छपाईच्या सोयीसाठीं,

$$\frac{१००}{६३} = \frac{१}{१+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{२+}\;\frac{१}{२+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{३}$$ असें लिहिण्याचा प्रघात आहे.

वाचकांस हें दिसेल कीं यांतला शेवटचा $\frac{१}{३}$ सोडला व उरलेला (A) मधला अपूर्णांक भागजाति केला म्हणजे त्याची किंमत $\frac{२७}{१७}$ ही आली. हिलाच 'उपांत्य अभिसारक' (penultimate convergent) अशी संज्ञा आहे. याच ठिकाणीं शेवटचे $\frac{१}{१+}\;\frac{१}{३}$ सोडले असते तर अपूर्णांकाची किंमत $\frac{१९}{१२}$ अशी आली असती. शेवटचे $\frac{१}{२+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{३}$ सोडले असते तर अपूर्णांकाची किंमत $\frac{८}{५}$ आली असती. शेवटचे $\frac{१}{२+}\;\frac{१}{२+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{३}$ सोडले तर किंमत $\frac{३}{२}$ होते. शेवटचे पांच अपूर्णांक सोडले तर किंमत २ व शेवटचे ६ अपूर्णांक सोडून दिले तर किंमत १ होते.

येथें हें स्पष्ट आहे कीं $\frac{१००}{६७}$ हे १ पेक्षां मोठे, २ पेक्षां लहान, $\frac{३}{२}$ पेक्षां मोठे, $\frac{८}{५}$ पेक्षां लहान, $\frac{१९}{१२}$ पेक्षां मोठे, पण $\frac{२७}{१७}$ पेक्षां लहान आहेत.

१ याला प्रथम अभिसारक म्हणतात.

२ याला द्वितीय अभिसारक म्हणतात.

$\frac{३}{२}$ याला तृतीय अभिसारक म्हणतात.

$\frac{८}{५}$ याला चतुर्थ अभिसारक म्हणतात.

$\frac{१९}{१२}$ याला पंचम अभिसारक म्हणतात.

$\frac{२७}{१७}$ याला षष्ठम किंवा 'उपान्त्य अभिसारक' म्हणतात.

$\frac{१००}{६३}$ याला सप्तम किंवा 'अंत्य अभिसारक' म्हणतात.

यांतला शेवटचा सोडून दिला तर ६ अभिसारक आहेत.

यांतला उपान्त्य $\frac{२७}{१७}$ हा $\frac{१००}{६३}$ पेक्षां थोडा मोठा पण जवळजवळ त्याच किंमतीचा आहे.

अर्थात, $\frac{२७}{१७} - \frac{१००}{६३} = \frac{१७०१ - १७००}{१७ \times ६३}$ झाले.

याचाच अर्थ असा कीं,

जर $\frac{अ}{ब}$ याचा उपान्त्य अभिसारक $\frac{प}{फ}$ असेल व दृढभाजकांतील लब्धि समसंख्याक असतील तर **अफ** − **पब** = −१ होईल.

आपलें मूळ समीकरण (A1) **अक्ष** − **बय** = −१ असेंच आहे.
म्हणून गुण **क्ष** = **फ** आणि लब्धि **य** = **प** हें सिद्ध झालें.

भाग २

आतां गुण व लब्धि यांचीं जीं अनेक धन उत्तरें संभवतात तीं काढूं. वरच्या दोन समीकरणांची वजावाकी केल्यास आपणांस **अ** (**क्ष** − **फ**) = **ब** (**य** − **प**) हें समीकरण मिळते. पण **अ** आणि **ब** परस्पर अविभाज्य आहेत.

∴ (**क्ष** − **फ**) यास **ब** नें निःशेष भाग जातो व (**य** − **प**) यास **अ** नें निःशेष भाग जातो.

∴ $\frac{क्ष - फ}{ब} = \frac{य - प}{अ}$ = **ट** हा पूर्णांक येईल.

ट ला शून्य किंवा ऋण किमतही देतां येईल. पण ज्यायोगें **क्ष** व **य** अधिक राहतील अशा किंमती दिल्यास **क्ष** = **बट** + **फ**, **य** = **अट** + **प** यानें सर्व उत्तरें मिळतील.

वरच्या उदाहरणांत **क्ष** = ६३**ट** + १७, **य** = १००**ट** + २७.
यांत **ट** = ० घेतलें तर **क्ष** = १७ आणि **य** = २७ हें सिद्ध झालें. म्हणजेच गुण १७ आणि लब्धि २७ झाली.

गुणमालिका १७, ८०, १४३ ....
आणि लब्धिमालिका २७, १२७, २२७ .... या दोन्ही गणित-श्रेढि आहेत.

भाग ३

जर समीकरण $\frac{अक्ष - १}{ब}$ = **य** असें असेल व लब्धि समसंख्याक असतील तर पुन्हां उपान्त्य अभिसारक तोच येईल व **अफ** − **पब** = −१ होईल.

या ठिकाणीं दोन समीकरणें $\left.\begin{array}{l} अक्ष - बय = १ \\ अफ - पब = -१ \end{array}\right\}$ अशी होतील.

यांची बेरीज करून **अ** (**क्ष**+**फ**) = **ब** (**प**+**य**) हें समीकरण मिळेल.
पण **अ**, **ब** परस्पर अविभाज्य. म्हणून (**क्ष**+**फ**) ला **ब** नें निःशेष भाग जातो.

तसेंच (**प+य**) ला **अ** नें निःशेष भाग जातो. अर्थात्,

$$\frac{\text{क्ष}+\text{फ}}{\text{ब}} = \frac{\text{प}+\text{य}}{\text{अ}} = \text{ट}.\ \text{किंवा क्ष} = \text{बट}-\text{फ},\ \text{य} = \text{अट}-\text{प}.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{अर्थात} & \text{क्ष} = \text{ब}\,(\text{ट}-१)+(\text{ब}-\text{फ}) \\ \text{आणि} & \text{य} = \text{अ}\,(\text{ट}-१)+(\text{अ}-\text{प})\end{array}\right\}\ \text{हीं उत्तरें आलीं.}$$

यांत **ट** = १ घेतल्यास गुण **अ — प** व लब्धि **ब — फ** आली.
म्हणून क्षेप ऋण असल्यास, भाज्य — (प्रथम लब्धि) ही लब्धि आली, तसेंच हार — (प्रथम गुण) हा गुण आला व भास्कराचार्याचा नियम सिद्ध झाला.

वरील $\frac{१००\text{क्ष}-१}{६३} = \text{य}$ यांत क्षेप धन असतां गुण १७ व लब्धि २७ आली होती.
आतांच्या समीकरणांत अनुक्रमें ६३ — १७ = ४६ गुण आणि १०० — २७ = ७३ ही लब्धि आली.

आणि गुण श्रेढि ४७, १०९, १७२ .... इत्यादि.

तसेंच लब्धि श्रेढि ७३, १७३, ३७३ .... इत्यादि.

भाग ४

समजा समीकरण $\frac{\text{अक्ष}+\text{क}}{\text{ब}} = \text{य}$ असें आहे. तर तें **अक्षबय = — क** असें होईल.

जर उपान्त्य अभिसारक $\frac{\text{प}}{\text{फ}}$ असेल व दृढभाजकांतील लब्धि समसंख्याक असतील तर **अफ — पब** = — १ होईल. यास **क** नें गुणून खालील समीकरणें होतील.

$$\left.\begin{array}{l}\text{अक्ष} - \text{बय} = -\text{क} \\ \text{अफक} - \text{पबक} = -\text{क}\end{array}\right\}\ \text{यांची वजाबाकी करून}$$

$$\text{अ}\,(\text{क्ष}-\text{फक}) = \text{ब}\,(\text{य}-\text{पक}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (B)$$

समीकरण (B) मध्यें **अ**, **ब** हे परस्पर अविभाज्य आहेत.

∴ **ब** नें **क्ष — फक** यांस पूर्ण भाग जातो; व **अ**नें **य — पक** यांस पूर्ण भाग जातो.

अर्थात् आपण हें समीकरण $\frac{\text{क्ष}-\text{फक}}{\text{ब}} = \frac{\text{य}-\text{पक}}{\text{अ}} = \text{ट}$ असें लिहिलें,

म्हणजे **क्ष = बट + फक** आणि **य = पक + अट** असें लिहूं शकतो.

यांत **फक** यांस **ब** नें भागून जर भागाकार **ट′** आला आणि बाकी **ग** आली तर **क्ष = ब (ट + ट′) + ग** होईल.

तसेंच **पक** यास **अ** नें भागून भागाकार **ट″** आला व **ल** बाकी राहिली तर **य = अ (ट + ट″) + ल** असें होईल.

यांत ट + ट′, ट + ट″ हे पूर्णांक पण सारख्या किंमतीचे नसले तर त्या दोहोंबद्दल एकच संख्या लिहिली (समजा **न**), तर

क्ष व **य** यांच्या श्रेढिसूत्र किंमती **क्ष** = **बन** + **ग**, **य** = **अन** + **ल** अशा होतील.

न शून्य घेतला म्हणजे **ग** हा गुण व **ल** ही लब्धि मिळते आणि भास्कराचार्यांचा नियम सिद्ध होतो. त्याचप्रमाणें क्षेपक ऋण असेल तर आपलीं समीकरणें
क्ष = **बन** − **ग** आणि **य**=**अन**−**ल** होतील.

तीं **क्ष** = **ब** (**न** − १) + (**ब** − **ग**) व **य** = **अ** (**न** − १) + (**अ** − **ल**) अशीं होतील व भास्कराचार्यांच्या सूत्रांतला पुढील नियम

श्लोक २४९

क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे ॥२४९॥

सिद्ध होईल.

भाग ५

समजा, जर कुट्टकांत भाज्य ऋण असेल व क्षेप धन असेल तर समीकरण

$-\dfrac{\text{अक्ष}+\text{क}}{\text{ब}}$ = **य** असें होईल. यांत **क्ष**, **य** धन समजूं.

अर्थात् तें समीकरण **अक्ष**+**बय** = **क** असें झालें.

$\dfrac{\text{अ}}{\text{ब}}$ हा अपूर्णांक घेऊन त्याचा उपान्त्य अभिसारक $\dfrac{\text{प}}{\text{फ}}$ झाला.

व दृढभाजकांतल्या लब्धि समसंख्याक असल्या तर **अफ**−**पब**= − १ होईल.

यास **क** नें गुणून समीकरणे **अक्ष**+**बय** = **क** आणि **अफक** − **बक**=**प** − **क** } अशीं होतील,

आणि यांची बेरीज करून **अ** (**क्ष**+**फक**) =**ब** (**पक** − **य**) असें समीकरण तयार होईल.

पण, **अ**, **ब** हे परस्पर अविभाज्य आहेत. ∴ $\dfrac{\text{क्ष}+\text{फक}}{\text{ब}} = \dfrac{\text{य}-\text{पक}}{\text{अ}}$ = **ट** होईल.

म्हणजेच, **क्ष** = **बट** − **फक**, **य** = **अट** + **पक**. आणि **फक** ला **ब** नें भागून बाकी **ग** व भागाकार **ट′** होईल तर **क्ष** = **ब** (**ट** − **ट′**) + **ग**.
तसेंच **य** = **अ** (**ट** + **ट″**) + **ल** होईल.

यांत **ट** − **ट′** हा ० पेक्षां मोटा असेल तर **ट**+**ट″** व **ट**−**ट′** यांचे बद्दल **न** धरून **क्ष** = **बन** + **ग**, **य** = **अन** + **ल** अशीं समीकरणें सुटतील.

आपण उपान्त्य अभिसारकाचा उपयोग केला त्यांत दृढभाजकाच्या लब्धींची संख्या सम धरली आहे. नवीन उपपत्तींत ही संख्या नेहमींच सम धरतात. कारण एखाद्या लब्धीच्या सांखळींत विषम लब्धी असतील तर त्यांच्या सम बनवितां येतात.

श्लोक २४२ चें समीकरण $\frac{१०\textbf{क्ष}+९}{६३}$ = **य**′ हें घेऊं.

येथें, $\frac{१०}{६३} = ० + \cfrac{१}{६ + \cfrac{३}{१०}} = ० + \cfrac{१}{६ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{३}}}$ — यांत ०, ६, ३ ही लब्धि–मालिका विषमसंख्याक आहे.

ती जर, $० + \cfrac{१}{६ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{१}}}}$ — अशी लिहिली, तर ती लब्धि--मालिका ०, ६, ३, २ अशी समसंख्याक होईल.

०	६३
६	३९६
३	६३
२	१८
९	x
०	x

आ. ६८

आणि आकृती ६८ मधील कोष्टकानुसार ऊर्ध्व व अधर राशि ६३ व ३९६ होतील. ६३ ला १० नें भागून बाकी ३ हा गुण व ३९६ ला ६३ ने भागून १८ हा लब्धि आला.

जर लब्धि–मालिका विषमसंख्याक घेतली असती तर २४२ श्लोकाप्रमाणें गुण १० – ७ = ३ व लब्धि ६३ – ४५ = १८ आली असती. म्हणून भास्कराचार्यांची रीत संपूर्णतया प्रस्थापित झाली.

भाग ७

ज्या वेळीं समीकरण **अक्ष** + **बय** = **क** अशा स्वरूपाचें असतें आणि अ, **ब**, **क** धन पूर्णांक असतात, तेव्हां गुण लब्धि धनरूपांत मिळतीलच असें नाहीं. कधीं कधीं धन गुण, धन लब्धि थोडेच मिळतील. खालचीं उदाहरणें हा मुद्दा स्पष्ट करतात.

समजा ४**क्ष** + ५**य** = ३ हें समीकरण घेतलें तर **क्ष**, **य** धन असतां दोन्ही बाजूंची समानता अशक्य आहे. पण ४**क्ष** + ५**य** = ७१ या समीकरणांत **क्ष** = ४, **य** = ११, **क्ष** = ९, **य** = ७, व **क्ष** = १४, **य** = ३ हीं धन गुणलब्धींची माला झाली.

क्ष, **य** यांच्या संपूर्ण मालिका **क्ष** = – ११ – ६, – १, ४, ९, १४, १९ .... इत्यादि व **य** = २३, १९, १५, ११, ७, ३, – १, – ५, – ९ .... वगैरे होतील.

येथें धन किंमतीचे ३ च गुण लब्धि आहेत. शिवाय **क्ष** ऋण तर **य** धन आणि **क्ष** धन तेव्हां **य** ऋण होतो.

याप्रमाणें कुट्टक (pulveriser) या समीकरणाची संपूर्णपणें फोड झाली.

प्रकरण ३३

अंकपाश किंवा गणितपाश

श्लोक २५०

स्थानांतमेकादिचयांकघातः । संख्याविभेदा नियतैस्युरंकैः ।।
भक्तोऽङ्कमित्यांकसमासनिघ्नः । स्थानेषु युक्तो मितिसंयुतिः स्यात् ।।२५०।।

अर्थ : जितकीं स्थानें दिलेल्या (तेवढ्याच) अंकांनीं भरावयाची आहेत तितक्या ठिकाणीं एका पासून सुरुवात करून दोन, तीन, चार या चढत्या क्रमानें अंक मांडावे व त्यांचा गुणाकार करावा. गुणाकाराइतके संख्याभेद होतात.

स्पष्टीकरण : या सूत्रांत जितके निरनिराळे अंक दिले आहेत तितक्याच जागा कल्पून त्यांत त्यांच्या निरनिराळ्या पण तेवढे सर्व अंक वापरून, ज्या रचना होतात त्यांची संख्या काढावयाची आहे. म्हणजे दिलेल्या निरनिराळ्या वस्तूंचे, सर्व वस्तू वापरून, प्रस्तार (permutations) किती होतात तें काढावयाचे आहेत. याचें सूत्र नवीन पद्धतींत $^{न}प_{न}$ = **न!** असें आहे. यांत **प** म्हणजे प्रस्तारसंख्या. तसेंच वरचा **न** ही दिलेल्या निरनिराळ्या वस्तूंची संख्या व खालचा **न** हीं प्रस्तारांत घेतलेल्या वस्तूंची संख्या आहे. तसेंच **न!** याचा अर्थ १ नें सुरुवात करून एकाधिक क्रमानें **न** पर्यंत लिहिलेल्या अंकांचा गुणाकार. अर्थात **न!** = १ × २ × ३ × ४.......... × (न − २) × (न − १) × न.

[**न!** यास 'क्रमचयी' **न** पर्यंत गुणाकार असें म्हणतात. Factorial n याला 'क्रमगुणित **न**' म्हणता येईल.]

हें सूत्र $^{न}प_{र}$ या सूत्राचाच उपसिद्धांत आहे. त्याची सिद्धि अशी.

सिद्धांत : जर आपणांजवळ एकूण निरनिराळ्या **न** वस्तु असतील व त्यांतल्या दर वेळीं **र** वस्तु घेऊन त्यांचे एकरेखीय प्रस्तार मांडले तर

$$\text{प्रस्तार संख्या } \frac{न!}{(न-र)!} \text{ इतकी होते.}$$ [प्रस्तार = permutation.]

सिद्धता : समजा आपण **न** घरें असलेली एक पेटी, आकृती ६९ प्रमाणें, तयार केली. त्यांतल्या प्रत्येक घरास किंवा चौकटीस अनुक्रम दला. यांतील पहिलीं **र** घरें भरावयाचीं आहेत. आपणां-जवळ **न** वस्तु असल्यानें पहिलें घर **न** प्रकारांनीं भरतां

घर	१	२	३	४	·	·	र		न
प्रकार	न	न−१	न−२	·	·	·	न-र+१		

आ. ६९

येईल. हें घर कोठल्या तरी वस्तूनें भरलें म्हणजे आपणांजवळ **न − १** इतक्या वस्तू

शिल्लक राहातात. अर्थात् दुसरे घर न − १ इतक्या प्रकारांनी भरतां येईल. म्हणजें पहिल्या घरांत टाकलेली वस्तु कायम ठेवून दुसरें घर न − १ प्रकारांनी भरतां येतें. पण पहिल्यांतली वस्तू न तऱ्हांनीं बदलतां येते.

∴ पहिलीं दोन घरें न × (न − १) इतक्या प्रकारांनीं भरतां येतील.

याचप्रमाणें तिसरें घर भरण्याचे प्रकार न − २. आणि ते पहिल्या दोन घरांतल्या वस्तु आहेत त्याच ठेवून.

पण पहिल्या दोन घरांतल्या वस्तूंच्या रचना न × (न − १).

∴ पहिल्या ३ घरांतल्या वस्तूंचे रचना–प्रकार न × (न − १) × (न − २) झाले.

याचप्रकारें पहिलीं र घरें भरण्याचे प्रकार मांडतांना गुणाकारांत र अवयव येतील.

$$\therefore\ {}^{न}प_{र} = न\,(न-१)\,(न-२)\ \ldots\ldots\ (न-र+१) \text{ हें सिद्ध.} \qquad (A)$$

आतां उजव्या बाजूकडील गुणाकार उतरता क्रमचय आहे. त्याचा जर चढता क्रम करावयाचा असेल तर

प्रथम त्याला (न − र) (न − र − १) (न − र − २) .... ३ × २ × १ यानें गुणलें व भागलें पाहिजे. तें केल्यावर

$${}^{न}प_{र} = \frac{न(न-१)(न-२)\ldots(न-र+१)(न-र)(न-र-१)\ \ldots३\times२\times१.}{(न-र)\,(न-र-१)\ \ldots\ldots\ ३\times२\times१}$$

वरील अंशांतला गुणाकार चढत्या क्रमांत लिहिला म्हणजे तो न! इतका होतो.

तसेंच छेदांतील गुणाकार चढत्या क्रमांत लिहिला म्हणजे तो (न − र)! इतका होतो.

$$\therefore\ {}^{न}प_{र} = \frac{न!}{(न-र)!} \text{ ही प्रस्तार-संख्या झाली.}$$

आतां आपणांस जर सर्वच वस्तू प्रस्तारांत घ्यावयाच्या असतील तर र = न करून ${}^{न}प_{र} = \frac{न!}{०!}$ असें होईल. तसेंच (A) सूत्रानें ${}^{न}प_{र}$ = न! असेंही सूत्र मिळेल. अर्थात् भास्कराचार्यांच्या सूत्राची सिद्धि झाली.

उदाहरण

श्लोक २५१

द्विकाष्टकाभ्यां त्रिनवाष्टकैर्वा । निरंतरं द्व्यादिनवावसानैः ।।
संख्याविभेदाः कति संभवन्ति । तत्संख्यकैक्यानि पृथग्वदाशु ।।२५१।।

अर्थ : २ आणि ८; ३, ८ व ९; त्याचप्रमाणें दोनपासून सुरुवात करून नऊपर्यंतचे अंक घेऊन निरनिराळ्या किती संख्या मांडतां येतील ? म्हणजेच त्यांचे प्रस्तारभेद किती होतील ? तसेच त्या सर्वांची बेरीज काय ? (भेदैक्य = प्रस्तारांची बेरीज.)

स्पष्टीकरण : २ व ८ यांचे २ अंकीं संख्याभेद अनुक्रमें २८ किंवा ८२ होतात. यांत स्थान संख्या २.

म्हणून वरील सूत्रानें $^{२}\text{प}_{२} = २! = १ \times २ = २$ भेद हें उत्तर.

३, ८, ९ यांच्या ३ अंकीं रचना $^{३}\text{प}_{३} = ३! = १ \times २ \times ३ = ६$, हें उत्तर.

२ ते ९ हे अंक घेतल्यास ८ जागा किंवा घरें ८ अंकांनीं भरावयाचीं आहेत.

$\therefore$ संख्याविभेद $^{८}\text{प}_{८} = ८! = १ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७ \times ८ = ४०३२०.$

आतां या प्रत्येक उदाहरणांत त्या त्या रचनांची बेरीज पण विचारली आहे. प्रथम बेरजेच्या सूत्रासंबंधीं उपपत्ति देऊं. संख्या जर एकाखालीं एक अशा लिहिल्या तर एकंस्थानीं जितके वेळां कोठलाही अंक येईल तितकेच वेळां दुसरा कोठलाही अंक येईल. म्हणजे **न**! इतक्या संख्याभेदांची बेरीज करतांना दिलेल्या **न** अंकांची बेरीज (न − १)! इतके वेळां आवृत्त होईल. अर्थात् एकं स्थानच्या अंकांची बेरीज

$$= (\text{न} - १)! \times (\text{दिलेल्या अंकांची बेरीज}) = \text{क्ष} \text{ समजा.}$$

जी परिस्थिति एकं-स्थानची, तीच परिस्थिति दहं-स्थानची, शतं-स्थानची, वगैरे इतर स्थानची होईल. म्हणून जर एकं स्थानची बेरीज **क्ष**, तर दहं स्थानची १०**क्ष** शतं-स्थानची १०० **क्ष**, ... याप्रमाणें बेरजा होतील.

$$\text{आणि एकूण बेरीज} = \text{क्ष} + १०\text{क्ष} + १००\text{क्ष} + \ldots\ldots + \text{क्ष} \times १०^{\text{न} - १} \quad (\text{न पदें})$$

$$= \frac{\text{क्ष} \times (१०^{\text{न}} - १)}{९}. \text{ क्ष ची किंमत घालून भूमितिश्रेढीनें,}$$

$$\text{बेरीज} = \frac{(\text{न} - १)! \times (१०^{\text{न}} - १)}{९} \times \text{अंकयोग, हें सूत्र तयार झालें.}$$

$$\text{पहिल्या उदाहरणांत भेदैक्य} = \frac{१ \times (१०^{२} - १)}{९} \times १० = \frac{९९}{९} \times १० = ११०.$$

$$\text{दुसऱ्या उदाहरणांत भेदैक्य} = \frac{१ \times २ \times ९९९}{९} \times (३ + ८ + ९)$$

$$= १११ \times ४० = ४४४०.$$

तिसऱ्या उदाहरणांत भेदैक्य $= \frac{७! \ (१०^{८} - १)}{९}$

$\times (२ + ३ + ४ + + ५ + ६ + ७ + ८ + ९).$

$= \frac{५०४० \times ९९९९९९९९}{९} \times ४४ = २२१७६० \times ११११११११$

$=$ २४६३९९९९७५३६० हें उत्तर.

उदाहरण

श्लोक २५२

पाशांकुशाहिडमरूककपालशूलैः । खट्वांग शक्तिशरचापयुतैर्भवन्ति ।।
अन्योन्यहस्तकलितैः कति मूर्तिभेदाः। शंभोर्हरेरिव गदारिसरोजशंखैः।२५२।

अर्थ : पाश, अंकुश, सर्प, डमरू, कपाल, शूल, खट्वांग, शक्ति, शर व धनुष्य हीं १० आयुधें श्रीशंकरांनीं आपल्या निरनिराळ्या हातांत घेतलीं (शंकर पंचानन आहे म्हणून त्याला १० हात आहेत असें गृहीत धरलें आहे) तर, सर्व प्रस्तारभेदांनी शिवाच्या मूर्ति किती ? तसेंच गदा, (अरि=चक्र), कमळ व शंख हीं ४ आयुधें विष्णूनें धारण केलीं, (अर्थात् आलटून पालटून निरनिराळ्या हातांत), तर विष्णूंच्या मूर्ति किती ?

स्पष्टीकरण : समजा आपण १० आयुधांचे सर्व क्रमभेद एकरेखीय पद्धतीनें मांडले व शंकराच्या हातांत त्या त्या क्रमानें दिले तर १० स्थानांत १० वस्तु ठेवल्यासारखें होईल.

म्हणून, क्रमभेद $= {}^{१०}प_{१०} = १०! = ४०३२० \times ९० = ३६२८८००$ हें उत्तर.

श्रीविष्णूंची ४ आयुधें त्यांच्या ४ हातांत ४! इतक्या प्रकारांनीं ठेवतां येतील. म्हणजे विष्णूंच्या २४ मूर्ति झाल्या.

[संध्येंत विष्णूंची २४ नांवें आहेत. त्यांत आयुधांच्या रचनेप्रमाणें मूर्तीचें नांव असतें, उदाहरणार्थ, डाव्या वरच्या हातांत शंख, उजव्या वरच्या हातांत चक्र, उजव्या खालच्या हातांत गदा व डाव्या खालच्या हातांत कमळ असलें म्हणजे विष्णूची मूर्ति होते असें हिंदुधर्मशास्त्र या ग्रंथांत सांगितलें आहे.]

सूत्र : दिलेल्या अंकात कांहीं समान अंक असल्यास क्रमभेद काढणे.

श्लोक २५३

यावत्स्थानेषु तुल्यांङकास्तद्भेदैस्तु पृथक् कृतैः
प्राग्भेदा विहृता भेदास्तत्संख्यैक्यं च पूर्ववत् ।।२५३।।



शंकराचीं आयुधें

(संदर्भ–श्लोक २५२, पृष्ठ १८६)

अर्थ : दिलेल्या अंकांत कांहीं अंक समान असतील तर जितक्या ठिकाणीं समान अंक असतील तेथें भिन्न अंक कल्पून जितके क्रमभेद होतील त्या संख्येनें, सर्व अंक भिन्न असतां जेवढे संख्याभेद होतील त्या संख्येस भागावें म्हणजे इष्ट संख्याभेद मिळतात व भेदांची बेरीज पूर्वीच्याच पद्धतीनें मिळते.

स्पष्टीकरण : ज्यावेळीं सर्व वस्तु निरनिराळया असतात व त्यांचे सार्वांशिक विपर्यय काढावयाचे असतात (सर्व वस्तु घेऊन रचना), त्यावेळीं आपलें सूत्र $^{न}प_{र} = न!$ हें असतें.

आतां या **न** वस्तूंतल्या **र** वस्तु समदर्शन (similar) आहेत. तर त्यांचे ऐवजीं तेथें भिन्न वस्तूंची कल्पना केली तर प्रस्तारभेद **न!** होतील. व या **र** भिन्न वस्तु ज्या ज्या स्थानीं आहेत तेथेंच ठेवून केवळ त्यांचेच, त्यांच्याच जागीं, प्रस्तारभेद मोजले तर ते **र!** इतके होतात. आतां या भिन्नदर्शन (dissimilar) वस्तू समदर्शन केल्या तर त्यांचा कोठलाही पर्याय तेंच रूप धारण करील. म्हणून हे **र!** पर्याय (भिन्न असतां) समदर्शन झाल्यावर केवळ एकच रूप धारण करतील

∴ त्रैराशिकानें, **र!** (भिन्नदर्शन) : १ समदर्शन : : **न!** (भिन्नदर्शनास) : इष्ट.

त्रैराशिक सम असल्यानें इष्ट भेद $= \frac{न!}{र!}$ हें सूत्र सिद्ध.

जर समदर्शन वस्तूंचे दोन गट असतील व त्यांत, **र** आणि **ल** वस्तू असतील तर

इष्टभेद $= \frac{न!}{र!\ ल!}$ इतके होतील.

शब्दार्थ : विपर्यय = भेद = रचना; सार्वांशिक = सर्व वस्तू रचनेंत घेऊन.
प्रस्तार = मांडणी किंवा रचना.

उदाहरण

श्लोक २५४

द्विद्व्येकभूपरिमितैः कति संख्यकाः स्युः ।
तासां युतिं च गणका ऽऽ शु मम प्रचक्ष्व ।।
अंभोधिकुंभिशरभूतशरैस्तथाऽङ्कैः ।
चेदंकपाशमितियुक्तिविशारदो ऽसि ।।२५४।।

अर्थ : २, २, १, १ या ४ अंकांनीं (४ आंकडयांच्या) संख्या किती व त्यांची बेरीज काय ? तसेंच ४, ८, ५, ५, ५ या अंकांचे सार्वांशिक विपर्यय किती व त्यांची बेरीज काय हें मला चटकन सांग.

स्पष्टीकरण : वर सांगितलेल्या सूत्राप्रमाणें एकण अंक ४, त्यांत दोन २ व दोन १, हे समान अंक.

$$\text{म्हणून क्रमभेद} = \frac{४!}{२! \times २!} = \frac{२४}{२\times२} = ६.$$

या सहा संख्यांत एकं स्थानीं १ व २ सारख्याच वेळां येतील. म्हणून तीन वेळां १ व तीन वेळां दोन येतील. अर्थात् एकं–स्थानच्या अंकांची बेरीज $१+१+१+२+२+२=९$ होईल. त्याप्रमाणें दहं, शतं व सहस्र-स्थानीं ९ बेरीज येईल. हातचा कुठेंच नाहीं. म्हणून बेरीज ९९९९.

दुसऱ्या उदाहरणांत एकूण पांच अंक आहेत. त्यांचे संख्याभेद $\frac{५!}{३!}$ इतके होतील, कारण ५ तीन वेळां दिला आहे. म्हणून संख्याभेद $\frac{१२०}{६} = २०$ झाले.

आतां पांचही अंक निरनिराळे असते तर या २० संख्यांत, ४ हा अंक $\frac{२०}{५}$ म्हणजे ४ वेळां एकं-स्थानीं आला असता. तसेंच ८ सुद्धां ४ वेळां एकं-स्थानीं आला असतां. आणि इतर निरनिराळे अंक प्रत्येकीं ४ वेळां एकं-स्थानीं आले असते. पण तेच समान असते तर १२ वेळां एकं-स्थानीं आले असते. म्हणजेच या २० संख्यांत ५ अंक १२ वेळां एकं-स्थानी आहे. म्हणून एकं-स्थानच्या अंकांची बेरीज $४\times४+८\times४+१२\times५=१०८$.

हीच बेरीज इतर स्थानीं होईल म्हणून एकूण बेरीज $= \frac{१०८\times(१०^{५}-१)}{९}$

$$= १०८\times११११११ = ११९९९८८ \text{ झाली.}$$

आतां याचें सूत्र असें : समजा **न** अंक दिले आहेत. यांत **र** अंक समान (**क्ष** एवढे) आहेत, व **ल** अंक समान (**य** एवढे) आहेत आणि कांहीं अंक एकेकदांच आलेले आहेत. तर एकूण संख्याभेद $\frac{न!}{र!ल!}$ इतके होतील. एकूण अंक **न** असल्यानें जो अंक एकेकदांच आहे त्याला एकं-स्थानी येण्याची संधि $\frac{न!}{र!ल!\times न}$ इतके वेळां मिळेल.

जर हे अंक किमतींत **अ, ब, क** असतील तर,

त्यांची एकं-स्थानची बेरीज $\frac{न!}{र!ल!\times न}$ (**अ+ब+क**) होईल.

आतां **क्ष** हा अंक **र** इतके वेळां आवृत्त आहे. म्हणून तो एकं-स्थानीं $\frac{न!}{र!ल!\times न} \times र$ इतके वेळां येईल आणि त्याची एकं-स्थानची बेरीज $\frac{न!}{र!ल!\times न} \times$ **रक्ष** इतकी होईल. त्याचप्रमाणें **य** अंकाचें होईल.

$\therefore$ एकं-स्थानच्या अंकांची बेरीज $= \frac{न!}{र!\,ल!\,\times न}$ (अ + ब + क + रक्ष + लय).

ही बेरीज ट असेल, तर दहं-,शतं-वगैरे स्थानीं ट येवढी' च बेरीज येईल व एकूण बेरीज

$$\frac{न!}{र!\,ल!\,\times न}\;\frac{(अ + ब + क + रक्ष + लय) \times (१०^{न} - १)}{९}$$ इतकी होईल.

हें सूत्र वरील उदाहरणांस लावल्यास पहिल्या उदाहरणांत अंक ४, २ दोनदां, १ दोनदां, म्हणून

पहिल्यांत बेरीज $= \frac{४!}{२!\,२!\,\times ४}\;\frac{(२\times२+२\times१)}{९}\;(१०^{४}-१)$

$= \frac{२४\times६}{१६\times९}\;(९९९९) = ९९९९.$

दुसऱ्यांत बेरीज $= \frac{१२०}{६\times५} \times \frac{(४+८+१३\times५)}{९} \times (१०^{५}-१)$

$= \frac{४\times२७}{९} \times ९९९९९ = १०८ \times ११११११ = ११९९९८८$ हें उत्तर.

उदाहरण

श्लोक २५५

स्थानषट्कस्थितैरङ्कैरन्योन्यं खेन वर्जितैः ।
कति संख्याविभेदाः स्युर्यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥२५५॥

अर्थ : शून्य सोडून एक तें नऊ अंक ६ स्थानीं (एका रेषेंत) मांडले तर त्यांचे संख्याविभेद किती होतील तें सांग.

स्पष्टीकरण : येथें अंक निरनिराळे आहेत व ९ अंकांनीं ६ घरें भरावयाची आहेत.

$\therefore$ श्लोक २५० मधील (A) सूत्राप्रमाणें

संख्याविभेद = ९ × ८ × ७ × ६ × ५ × ४ = ६०४८०.

सूत्र : अंकांची बेरीज व अंकांची स्थानसंख्या दिली असतां संख्या विभेद काढणे.

श्लोक २५६, २५७

निरेकमंकैक्यमिदं निरेकस्थानांतमेकापचितं विभक्तम् ।
रूपादिभिस्तन्निहतैः समा स्युः । संख्याविभेदा नियते ऽङ्कयोगे ॥ २५६ ॥
नवान्वितस्थानकसंख्यकायाः । ऊने ऽङ्कयोगे कथिते तु वेद्यम् ॥
संक्षिप्तमुक्तं पृथुताभयेन । नान्तोस्ति यस्माद्गणितार्णवस्य ॥२५७॥

अर्थ : ज्या ठिकाणीं अंकांची बेरीज दिली आहे व अंक किती स्थानीं मांडावयाचे त्याचा आंकडा दिला आहे तेथें संख्याविभेद काढणें झाल्यास खालील क्रिया करावी.

दिलेल्या बेरजेंतून १ वजा करून, तेथून उतरत्या क्रमानें (एक वजा करून) अंकांचा गुणाकार करावा. जितकी स्थानसंख्या दिली आहे त्यापेक्षां एक कमी इतके अवयव या गुणाकारांत घ्यावे. यास १, २, ३, ४ .... यांच्या गुणाकारांत तितकेच अंक घेऊन त्यानें भागावें म्हणजे अंकयोग दिला असतां किती संख्याविभेद होतील तें समजतें.

ही रीत स्थानसंख्येंत नऊ मिळवून जो आंकडा येईल त्यापेक्षां दिलेली बेरीज कमी असल्यास छान लागूं पडते.

हें सर्व विस्तारभयास्तव थोडक्यांत सांगितलें आहे. कारण या गणित–महासागराला अंत नाहीं

स्पष्टीकरण : या ठिकाणीं जर बेरीज **न** असेल व स्थानसंख्या **प** असेल तर खंडभेदसंख्या

$$\frac{(न-१)(न-२)(न-३)\ \ldots\ (न-प+१)}{१\times२\times३\times४\ \ \ldots\ \ (प-१)}$$, इतकी होते.

उदाहरणार्थ, अंकांची बेरीज ६ व स्थानें ३ असतील तर त्यासाठीं अंकरचना १, १, ४; १, २, ३; २, २, २ इतक्याच होतील.

पहिल्याचे संख्याभेद $\frac{३!}{२!}$, दुसऱ्याचे ३! व तिसऱ्याचे $\frac{३!}{३!}$ इतके होतील.

म्हणजेच एकूण भेद ३+६+१=१० होतील.

सूत्राप्रमाणें भेद $= \frac{(६-१)(६-२)}{१\times२} = \frac{५\times४}{२} = १०$ हें उतर.

या सूत्राचें स्पष्टीकरण खालीलप्रमाणें देतां येईल.

सिद्धता : समजा अंकांची बेरीज **स** आहे व स्थानांची संख्या **न** आहे. आणि **स**=**न**+**म** धरू तर **स** ≤ **न**+९ म्हणजेच **न**+**म** ≤ **न**+९. अर्थात् **म** ≤ ९ असल्यास कोठल्याही संख्याभेदाची मांडणी करण्यास अडचण येणार नाहीं, कारण **म**+१ ची जास्तींत जास्त किंमत ९ होईल.

आतां असें समजूं कीं **स** ही बेरीज **म** + **न** अशा एककांनी पसरून लिहिली. तर **स**=१+१+१+१ .... **न** वेळां +१+१+१+ .... **म** वेळां असे होतील. यांतल्या पहिल्या **न** एककांना $अ_{१}$, $अ_{२}$, $अ_{३}$, ... $अ_{न}$ अशीं चिन्हें वापरूं व पुढल्या **म** एककांना $ब_{१}$, $ब_{२}$, $ब_{३}$, ... $ब_{म}$ अशा खुणा देऊं.

तर $स = अ_{१} + अ_{२} + अ_{३} \ldots\ldots + अ_{न} + ब_{१} + ब_{२} + ब_{३} + \ldots\ldots + ब_{म}$

आतां या उजवीकडील **स** अक्षरांत, **अ** गटांत **न** समान अक्षरें व **ब** गटांत **म** समान अक्षरें आहेत, अशी कल्पना करूं. त्यांच्या किंमती अखेरीस १ एवढयाच आहेत. आतां या सर्व अक्षरांचे प्रस्तारभेद मांडले तर त्यांची संख्या $\frac{स!}{न!\,म!}$ इतकी होईल. पण त्यांत $अ_{१}$ हा प्रस्तारारंभींच कायम ठेवला व इतर अक्षरें कशीही व कुठेंही ठेवलीं तर प्रस्तार-संख्या $\frac{(स-१)!}{(न-१)!\times म!}$ इतकी होईल.

समजा, आपण एक प्रस्तार $अ_{१}\,ब_{१}\,ब_{२}\,अ_{२}\,ब_{३}\,ब_{४}\,ब_{५}\,अ_{३}\ldots ब_{म}\,अ_{४}\,अ_{५}\ldots अ_{न}$ असा घेतला तर त्याचा अर्थ $(३+४+\overline{म+१-५}+१+१+१\ldots १\ \overline{न-३}$ वेळां) हा संख्याभेद दर्शविला जाईल. यांत $अ_{१}$ पुढें जितके **ब** आहेत ते धरून ३ झाले. $अ_{२}$ पुढें जितके **ब** आहेत ते धरून ४ झाले. उरलेले सर्व $(म-५)$**ब**, $अ_{३}$ पुढें आले म्हणून तिसरा अंक $म+१-५$ इतका झाला. पुढें कोठेंच **ब** नाहीं. म्हणून प्रत्येक **अ** बरोबर १, १, १ असे $न-३$ वेळां लिहिले. या सर्वांची बेरीज $म+न$ झाली.

याप्रमाणें कोठल्याही प्रस्तारांत $ब_{१}, ब_{२}, ब_{३}\ldots\ldots ब_{म}$ हे $अ_{१}, अ_{२}, अ_{३}, \ldots अ_{न}$ यांच्या दरम्यान कोठेंही, कसेही फेंकले तरी **न**-स्थानी प्रस्तार तयार होईल. याला अपवाद फक्त एकच. तो म्हणजे $अ_{१}$ च्या अगोदर $ब_{१}, ब_{२}\ldots\ldots$पैकीं कांहींही अक्षरें ठेवता येणार नाहींत. कारण समजा $अ_{१}$ च्या अगोदर $ब_{१}$ लिहिला तर प्रस्तार, $ब_{१}\,अ_{१}\ldots\ldots$ असा होईल. म्हणजे $ब_{१}$ च्या अगोदर शून्य आहे अशी कल्पना करणें भाग पडेल. पण कोठलाही **अ** शून्य नाहीं. तो एक एवढाच आहे. तसेंच स्थानें **न** ऐवजीं $न+१$ इतकी होतील. पण हें प्रश्नाविरुद्ध आहे. यावरून असें दिसतें कीं प्रारंभीं $अ_{१}$ कायम ठेवून व पुढें **अ** गट व **ब** गट यांतलीं कोठलीही अक्षरें कुठेंही ठेवून जेवढे पर्याय होतील त्या प्रत्येकाची बेरीज **स** होईल.

आतां $अ_{१}$ पहिल्या जागीं खिळविल्यानंतर उरलेली $म+न-१$ अक्षरें निरनिराळ्या प्रकारांनीं मांडली तर त्यांचे प्रस्तार $\frac{(म+न-१)!}{म!\ (न-१)!}$ एवढे होतील.

पण $स = म+न$. $\therefore$ प्रस्तारसंख्या $= \frac{(स-१)!}{म!\times(न-१)!}$, हें सूत्र सिद्ध.

टीप : भारतांतलें एक दिवंगत गणितरत्न कै. रामानुजन यांनीं प्रथम त्रिग्रहभेदसिद्धांत (Theory of Partitions) शोधून काढली. या सिद्धांताची मूळ कल्पना त्यांना भास्कराचार्यांच्या २५५ श्लोकावरून सुचली असावी असें म्हणतात. कै. खानापूरकरशास्त्री यांनी वरील गणिताची उपपत्ति कां दिली नाहीं हें समजत नाही. वरील उपपत्ति कै. कोलब्रुक यांच्या लीलावतीच्या इंग्रजी भाषांतरावरून थोडा फरक करून घेतली आहे. ती मूळ गणेश दैवज्ञाच्या 'बुद्धिविलासिनी' टीकेवरून कोलब्रुकनें घेतली असावी.

उदाहरण

श्लोक २५८

पंचस्थानस्थितैरंकैर्यद्यद्योगस्त्रयोदश ।
कति-भेदा भवेत्संख्या यदिवेत्सि निगद्यताम् ।।२५८।।

अर्थ : पांच ठिकाणीं पूर्णांक मांडून त्यांची बेरीज १३ होईल असे संख्याविभेद किती आहेत हें तूं जाणत असशील तर सांग.

स्पष्टीकरण : येथें बेरीज १३ व स्थानें ५. म्हणून **स** = १३, **न** = ५, **म**=८; आणि

$$\text{संख्याविभेद} = \frac{(१३-१)!}{(५-१)!\ ८!} = \frac{१२!}{४!८!} = \frac{९+१०\times११\times१२}{२४} = ४९५ \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोक २५९

न गुणो न हरो न कृतिर्न घनः पृष्टस्तथापि दुष्टानाम् ।
गर्वितगणकबटूनां स्यात्पातोऽवश्यमंकपाशेऽस्मिन् ।।२५९।।

अर्थ : बिघडलेल्या गर्विष्ठ गणकबटूंना गुणाकार, भागाकार, वर्ग, घन यावरचे प्रश्न विचारले नाहींत, (कारण ते सोपे असतात). पण त्यांचा गर्व नाहींसा करणें असेल तर त्यांना अंकपाशांतला एकादा प्रश्न विचारावा म्हणजे त्यांचा अवश्य पाडाव होईल.

श्लोक २६०

येषां सुजातिगुणवर्गविभूषितांगी ।
शुद्धाखिल-व्यवहृतिः खलु कंठसक्ता ।।
लीलावतीह सरसोक्तिमुदाहरन्ती ।
तेषां सदैव सुखसंपदुपैति वृद्धिम् ।।२६०।।

अर्थ : (पहिला) : जिच्यांत, जाति, अपूर्णांक, गुणाकार वगैरे भाग उत्तम प्रकारें वर्णन केले आहेत, जिच्यांत सर्व व्यवहार-प्रकरणें स्पष्टरूपानें मांडलेली आहेत, जिच्यामधले नियम शुद्ध आहेत व जिच्यांत उदाहरणें सरस भाषेंत सांगितली आहेत, अशी लीलावती ज्यांना कंठगत होईल, त्यांची सुख व संपति नेहमीं वाढीस लागेल.

(दुसरा) : जिचा जन्म शुद्ध कुळांत झाला आहे, गुणिजनांच्या समूहांत जी शोभून दिसते, सर्व व्यवहारांत जी निर्मळ आहे. जी उत्तम वाक्प्रचार व म्हणींची उदाहरणें देऊं शकते, अशी (माझी कन्या) लीलावती ज्याला वरील त्याच्या घरीं सुख व संपत्ति नेहमींच वाढत राहातील.

श्लोक २६१

अष्टौ व्याकरणानि षट्च भिषजां व्याचष्ट ताः संहिताः ।
षट् तर्कान् गणितानि पंच चतुरो वेदानधीते स्म यः ।।
रत्नानां त्रितयं द्वयं च बुबुधे भीमांसयोरन्तरे ।
सद्ब्रह्मैकमगाधबोध महिमा सो ऽ स्याः कविर्भास्करः ।।२६१।।

अर्थ : आठ व्याकरणें, सहा वैद्यकविषयक संहिता, सहा न्यायशास्त्रें, पांच गणितग्रंथ, चार वेद, तीन अधिक दोन अशीं पांच भरतशास्त्रें, दोन मीमांसा, ही ज्यानें आत्मसात् केली होती, जगांत सच्चिदानंदरूपीं एकाच परब्रह्माचा महिमा न समजण्या-इतका अगाध आहे हें जो मानीत असे, तो कविवर्य भास्कराचार्य या ग्रंथाचा ग्रंथकर्ता आहे. [अर्थात् तो केवळ गणितच जाणीत होता असें नव्हे.]

।। इति भास्कराचार्यविरचिता लीलावती समाप्ता ।।

परिशिष्ट पहिले

लीलावतीवरील टीकाग्रंथ व भाषांतरें

अनुक्रमांक	लेखक	टीकेचें नांव	शके	इ. सन
१	रामकृष्ण	गणितामृतलहरी	१२६१	१३३९
२	नृसिंह	वासनावार्तिक	१२७२	१३५०
३	नारायण भट्ट	गणितकौमुदी	१२७८	१३५६
४	गंगाधर	गणितामृतसागरी	१३४२	१४२०
५	लक्ष्मीदास	गणितचिंतामणि	१४२२	१५००
६	रामकृष्ण देव	मनोरंजना		पंधरावें शतक
७	सूर्यदास	गणितामृतकुपिका	१४६०	१५३८
८	गणेश दैवज्ञ	बुद्धिविलासिनी	१४६७	१५४५
९	फैझी	भाषांतर	१५०९	१५८७
१०	मुनीश्वर	निःसृष्टिदूति (मरीचिका)	१५३०	१६०८
११	रंगनाथ	वासनाभाष्य (मितभाषिणी)	१५४२	१६२०
१२	महीधर	लीलावतीविवरण	१५५७	१६३५
१३	महीदास	....	१५०९	१५८७
१४	जेम्स टेलर	भाषांतर (इंग्रजी)	....	१८१६
१५	एच्. टी. कोलब्रुक	,, (इंग्रजी)	....	१८१७
१६	एरंडोलकर	,, (मराठी)	....	१८८९
१७	खानापूरकर शास्त्री	,, (मराठी)	....	१८९७
१८	रावेरकर शास्त्री	प्रकाशिका (हिंदी)	....	१८९३
१९	राजे शिवप्रसाद	,, (,,)	....	१८७६
२०	पंडित जियाराम	,, (,,)	....	१८९३
२१	पंडित दयानाथ	,, (,,)	....	१९५९
२२	पंडित सुधाकर द्विवेदी	चंद्रप्रभा (,,)	....	१९१०
२३	पंडित रामस्वरूप शर्मा	स्वरूपप्रकाश (हिंदी)	....	१९१५
२४	हरिणचंद्र बानर्जी	भाषांतर (इंग्रजी)	....	१९३०

या शिवाय कृष्ण दामोदर, परशुराम, वृंदावन, धनेश्वर, इत्यादींच्या टीका आहेत. पंडित जीवानंद विद्यासागर यांची पण टीका आहे (१९००)

परिशिष्ट दुसरे

लीलावतींतील संख्यावाचक साहित्यिक शब्द

अंक	शब्द
१	कु, भू, इंदु, चंद्र, रूप.
२	यम, नेत्र, लोचन, अश्वि, पक्ष, अक्षि.
३	राम, गुण, अग्नि, ग्राम, क्रम, पुर, लोक.
४	सागर, अंभस्, युग, वेद, अब्धि.
५	बाण, शर, भूत, इषु, प्राण, कार्मुक, अक्ष.
६	रस, ऋतु, अंग, तर्क.
७	अश्व, वाजी, तुरग, शैल, अद्रि, भूभृत्, स्वर, ऋषि.
८	कुंभि, नाग, वसु, अहि, द्विप, भुजंग, सर्प.
९	नंद, गो, अंक, छिद्र, रंध्र, नभश्चर.
१०	दिक्, आशा.
११	ईश, रुद्र, भव, मदनारि, महेश्वर.
१२	अर्क, तिग्म, सूर्य, रवि, दिवाकर.
१३	विश्वे.
१४	शक्र, इंद्र, मनु, भुवन.
१५	तिथि.
१६	नृप, यज्ञ, अष्टि, राजन्.
१७	अत्यष्टि.

अंक	शब्द
१८	धृति.
१९	अतिधृति.
२०	नख, अङ्गुलि, कृति.
२१	प्रकृति, मूर्च्छना, स्वर.
२२	जाति.
२३	आकृति, विकृति, संकृति, अर्हत्.
२४	जिन, सिद्ध.
२५	तत्त्व, अतिकृति.
२६	उत्कृति.
२७	भ (नक्षत्रें), नक्षत्र.
३२	दंत, दशन, द्विज.
३३	सुर.
४९	तान.
१/२	दल, अर्ध.
१/४	चरण, पाद, अंघ्रि.
३/४	पादत्रय, व्यंघ्रि.
१/१०	दशमलव.
१/९	नवमलव.
१	व्येक.
०	शून्य, ख, अभ्र, अंबर, आकाश, पूर्ण.
१/६३	त्रिषष्टि भाग.

परिशिष्ट तिसरें

गणिती क्रियांसाठीं वापरलेले शब्द

मराठी शब्द	संस्कृत प्रतिशब्द
बेरीज	योग, युति, चय, ऐक्य, संयुति, संकलित, विश्लेष.
मिळविले	उपेत, युक्त, युत, समन्वित, अधिक, अनुबंध.
वजाबाकी	अपचय, विवर्जन, अंतर, शुद्धि, विवर, अपवाह.

वजा केले	....	.... विर्वजित, वियुत, ऊनित, ऋण, वजत, वियोजित, व्यवकलित.
गुणाकार	....	.... गुणन, हनन, हति, वध, निहति, निघ्न, घात.
भागाकार	....	.... हर, विभक्ति, भक्ति, विभजन, विभाजन, हृति, हार, अपवर्तन, तक्षण.
भागल्यास, भागलें तर....		.... तष्ट, क्षुण्ण, भक्त, भाजित.
वर्ग, वर्ग करणें	....	.... वर्ग, कृति.
घन, घन करणें	....	.... घन, त्रिघात.
वर्गमूळ	....	.... मूल, वर्गमूल, वर्गपद, पद, करणी.
घनमूळ	....	.... घनमूल, घनपद.

परिशिष्ट चवथे

लीलावती संबंधी आख्यायिका

भास्कराचार्यानें आपल्या ग्रंथाला 'लीलावती' हें नांव कां दिलें या संबंधीं अनेक तर्क केले जातात. या तर्कांना व कल्पनांना प्रत्यक्ष पुरावा असा लीलावतींत अथवा सिद्धांत-शिरोमणीच्या इतर कोठल्याही भागांत आढळत नाहीं. कोलब्रूकच्या भाषांतरांत लीलावती ही भास्कराचार्याची कन्या होती किंवा असावी असा संदिग्ध उल्लेखही कोठें येत नाहीं. कै. शंकर बाळकृष्ण दीक्षित यांनीं देखील 'भारतीय ज्योतिःशास्त्र' या ग्रंथांत लीलावती भास्कराचार्याची कन्या असावी असें कुठेंच म्हटलेलें नाहीं. किंबहुना त्यांनी या विषयीं पूर्ण मुग्धताच स्वीकारली आहे. या ग्रंथाचे भाषांतरकर्ते विनायकशास्त्री खानापूरकर यांनीं देखील लीलावती संबंधींच्या कोठल्याही आख्यायिकेचा संदर्भ आपल्या प्रस्तावनेंत दिलेला नाहीं. पंडित सुधाकर द्विवेदी यांनीं आपल्या 'गणकतरंगिणींत' लीलावती ही भास्कराचार्याची मुलगी किंवा स्त्री असावी असा उल्लेख केलेला आढळतो. गणेश दैवज्ञ व भास्कराचार्याचे जे लगोलगचे टीकाकार झाले त्यांच्या टीका मला प्रत्यक्ष वाचावयास न मिळाल्यानें लीलावती या व्यक्तिसंबंधानें ते काय म्हणतात हें जाणण्याचा मार्ग उपलब्ध नाहीं. पण कोणाही टीकाकारानें ह्यासंबंधीं कांहींच लिहिलेलें नसेल तर त्याचा निष्कर्ष हाच कीं लीलावती नांवाची स्त्री अस्तित्वांतच नव्हती.

पण लीलावतींत, बाले, बालकुरंगलोलनयनें, मतिमति, कांते, मृगाक्षि वगैरे तरुण स्त्रीस उद्देशून केलेलीं संबोधनें आढळतात ; त्यांचें काय ? याचें उत्तर असें कीं, विद्यार्थ्यांना उद्देशून वत्स, गणक, गाणितिक, सखे, गणकोत्तम, कोविद, नंदन, इत्यादि अनेक संबोधनें पुंल्लिगवाचकही आहेत ; त्यांचे काय ? त्यांतला खरा भाग हा कीं, गणिताचें पुस्तकही त्या काळीं पद्यांत लिहिणें आवश्यक असे. म्हणून कांहीं ठिकाणीं अक्षरपूर्ति, योग्य गणाचा शब्द, व अनुप्रास घालणें जरूर पडत असे. तसेंच प्रश्नांत

जिवंतपणा येण्यासाठीं सखे, वत्स वगैरे शब्दांचा वापर आवश्यक ठरतो. त्याकाळीं स्त्रीशिक्षण शिष्टसंमत नव्हतें. त्यामुळें मुली विशेष गणित शिकत असतील असें वाटत नाहीं. तथापि भास्कराचार्याची मुलगी त्याच्या वर्गांत कौतुकाचा भाग म्हणून बसत असली, तरी प्रारंभीचे कांहीं सोपे प्रश्न तिला उद्देशून विचारल्यासारखे वाटतात. पण पुढच्या प्रश्नात, लीलावतीला उद्देशून विचारलेले प्रश्नच नाहीत. शिवाय एका आख्यायिकेंत सांगितल्याप्रमाणें, जर लीलावतीला, बालवैधव्य आल्यावर, भास्कराचार्यानें गणित शिकविलें असेल तर तिचें वपन केलें नव्हतें काय यासंबंधीं माहिती असणें जरूर आहे. कारण त्या सनातनी कर्मठ काळांत नवरा मेलेली स्त्री सकेशा राहाणें शक्य वाटत नाहीं. एकूण पुराव्यावरून लीलावती नांवाची कोणी व्यक्ति नसून 'पाटीगणित' या विभागाचें तें काव्यात्मक अलंकारिक नांव आहे हीच गोष्ट खरी ठरते. ग्रंथाच्या २६१ श्लोकांत सांगितल्याप्रमाणें ही ग्रंथलीलावती ज्याला कंठगत म्हणजे मुखोद्गत होईल त्याची भरभराट होईल असेंच भास्कराचार्य सांगतो.

आख्यायिका पहिली

लीलावती ही भास्कराचार्याची एकुलती एक मुलगी. ती ज्यावेळीं उपवर झाली, (त्या काळाप्रमाणें ८–१० वर्षांची) त्यावेळीं तिची कुंडली समोर ठेवून तिचा विवाहयोग कसा आहे याचें त्यानें भविष्य पाहिलें. त्याला असें दिसून आलें कीं लीलावतीला लग्नानंतर लगेच वैधव्ययोग आहे; फक्त एका विशिष्ट मुहूर्तावर लग्नविधि झाला तरच नवऱ्याचा मृत्युयोग टळेल व ती विधवा होणार नाहीं.

अशा प्रकारचें भविष्य भास्कराचार्याला दिसतांच ज्या शुभमुहूर्तावर वैधव्ययोग टळत होता त्याच मुहूर्तावर लग्न करण्याचा घाट त्यानें घातला. परमेश्वरी बेत मात्र निराळा होता. लग्नाच्या वेळेस गौरीहरपूजनास लीलावती बसली. पण घटिकापात्र घंगाळांतल्या पाण्यांत नीट बुडतें आहे कीं नाहीं हे जाणून घेण्याचें औत्सुक्य तिला अनावर होऊन ती घटिकापात्र पाहाण्यासाठीं उठन त्याच्याजवळ गेली आणि त्यांत ती डोकावून पाहूं लागली. विधिघटना निराळी होती. तिच्या कपाळास ज्या कुंकमयुक्त अक्षता लावलेल्या होत्या त्यांतला एक दाणा टपकन् घटिकापात्रांत पडला. तांदुळाचा तो जड दाणा पात्रांतल्या पाण्यांत बुडून तळाशीं गेला व घटिकापात्राच्या बारीक छिद्रांत अडकून बसला. पात्रांत बाहेरून येणारें पाणी बंद झालें. याचा व्हायचा तोच परिणाम झाला. लग्नाचा मुहूर्त हुकला. जो मुहूर्त साधण्यासाठीं भास्कराचार्याची एवढी धडपड चालली होती तो मुहूर्त चुकला. पुढें एक दोन वर्षांतच लीलावती पतिहीन झाली. तिला भास्कराचार्यानें परत स्वगृहीं आणली. नंतर तिचें आयुष्य वाया जाऊं नये म्हणून तिला गणित शिकवले.

कोणी असेंही म्हणतात कीं मुलीला वैधव्ययोग आहे हें समजल्याबरोबर भास्कराचार्यानें तिला आजन्म कुंवार ठेवण्याचें ठरविलें व तिला कांहींतरी व्यवसाय असावा म्हणून गणित शिकवलें.

आख्यायिका दुसरी

उत्तर भारतांत अशी आख्यायिका प्रचलित आहे कीं, लीलावती ही भास्कराचार्यांची पत्नी. लग्न झाल्यावर अनेक वर्षे तिला मूलबाळ झालें नाहीं. तिचा रोजचा वेळ कंटाळवाणा होऊं लागला म्हणून तिच्या मनाला कांहींतरी व्यवसाय असावा या हेतूने भास्कराचार्यांनें तिला गणित शिकविलें.

आख्यायिका तिसरी

भास्कराचार्य ज्याप्रमाणें आपल्या वडिलांजवळ अध्ययन करी त्याचप्रमाणें दुसऱ्या एका गुरूंजवळही अभ्यास करीत असे. त्यांची कन्या लीलावती. भास्कराचार्य गुरुगृहीं शिकत असतां त्याची तैलबुद्धि, उमदा स्वभाव, सुंदर शरीरयष्टि, काव्यशक्ति, हजरजबाबीपणा, हे गुण पाहून लीलावतीचें त्याच्यावर प्रेम बसलें. शिक्षण संपवून भास्कर जेव्हां परत आपल्या घरीं जाण्यास निघाला तेव्हां लीलावतीनें त्याला आपला मनोदय सांगितला. भास्करालाही ती सुलक्षणा मनापासून आवडत होती. पण ती गुरुकन्या होती. त्यामुळें ती आपल्या संस्कृतीप्रमाणें त्याची गुरुभगिनी झाली. म्हणून, मनांत असूनही, त्याला तिच्याशीं विवाह करतां येईना. त्यानें तिला शास्त्रवचन सांगून नकार दिला ; पण त्यानें तिला असें वचन दिलें कीं, 'मला तुझी नेहमीं आठवण रहावी व मी तुला विसरूं नये म्हणून माझ्या पहिल्या ग्रंथास मी तुझें नांव देईन.'

यांतली दुसरी आख्यायिका तर अविश्वासार्ह आहे. कारण भास्कराचार्यास लक्ष्मीधर नांवाचा विद्वान् पुत्र होता व चंगदेव नांवाचा नातू होता हें पुढें (परिशिष्ट ५) जी नाशिक क्षेत्रीं सांपडलेल्या ताम्रपटाची नक्कल दिली आहे तिजवरून दिसून येतें. शिवाय निरपत्य स्त्रीला विरंगुळयासाठीं गणित शिकविणें हें अरसिकतेचें द्योतक गणलें जाईल. भास्कराचार्य तर रसिकाग्रणींचा पुढारी. आपल्या गणिती प्रश्नांतही जो शृंगार-रसाची पेरणी करण्यास (श्लोक ५३ पहा) मागेंपुढें पहात नाहीं, तो भास्कराचार्य आपल्या पत्नीला रुक्ष गणिताची दीक्षा देईल हें संभवनीय वाटत नाहीं. शिवाय बरेच वर्षांत जिला मूल झालें नाहीं ती स्त्री निदान ३० वर्षांची असली पाहिजे. तिला बाले, बालकुरंगलोलयने हीं विशेषणें शोभत नाहींत.

तिसरी आख्यायिका शक्य कोटीतली असून नाट्यविषय होण्याइतकी सुंदर आहे. विद्याहरण नाटकाप्रमाणेंच ही कथा आहे. पण भास्कराचार्य म्हणतो कीं मी सर्व शास्त्रें माझ्या वडिलांजवळ शिकलों. गोलाध्यायांतील प्रश्नाध्याय प्रकरणांत तो म्हणतो :

महेश्वरकृतिर्भास्करस्तज्जस्तच्चरणारविन्दयुगुलात्प्राप्तप्रसादः ।

यावरून तो दुसऱ्या शास्त्र्याकडे शिकण्यास जात होता हें निश्चित होत नाहीं म्हणून तिसरी आख्यायिका विश्वासार्ह वाटत नाहीं. ही आख्यायिका माळवा प्रांतांत रूढ आहे. महाराष्ट्रात फक्त पहिलीच ऐकण्यांत येते. ती लोकांच्या चटकन स्मरणांत राहाते. याचें

कारण तिचा संबंध भविष्यकथनाशीं येतो. त्यांतला दुसरा पर्याय तर अगदींच फुसका वाटतो. कारण मुलीला आजन्म कुंवार ठेवण्याचा निर्णय कोणीच शहाणा माणूस घेणार नाहीं. आणि भास्कराचार्यासारखा सुधारणावादी ज्योतिषी तर नाहींच नाहीं. त्या काळीं स्त्रियांना शिक्षण वर्ज्य होतें व गतधवांना तर तें अजिबात वर्ज्य असावें. एकूण कोणतीही आख्यायिका शक्य कोटींतली वाटत नाहीं.

शिवाय श्लोक १९६ मध्यें 'चेद्वेत्सि लीलावतीम्।' असें स्वत: भास्कराचार्यच शिष्यास सांगतो. त्याचा संदर्भ लीलावतींतल्या रीतींकडे जातो. अर्थात् लीलावती नांवाची स्त्री नाहीं, तें गणित-ग्रंथाचें नांव आहे, ही गोष्ट आपोआप स्पष्ट होते. लीलावतीच्या अभ्यासकांनीं १९६ वा श्लोक नीट वाचला असता तर वरील सर्वच आख्यायिका केवळ कपोलकल्पित आहेत याबद्दल त्यांची खात्री पटली असती.

परिशिष्ट पांचवें

भास्कराचार्यासंबंधीं ताम्रपट व शिलालेख

नाशिक येथील पंचवटींतील प्रख्यात ज्योतिषी घोलप यांचेकडे भास्कराचार्यासंबंधीं एक ताम्रपट डॉ. भाऊ दाजी तेलंग यांस मिळाला. ताम्रपटाच्या रूपानें जीं दानें पूर्वकाळीं दिली जात तीं कायम स्वरूपाचीं दानें तांब्याच्या पत्र्यावर कोरण्याची प्रथा होती. भास्कराचा नातू चंगदेव हा यादव वंशांतल्या सिंघण राजाच्या पदरीं ज्योतिषी होता. चंगदेवानें भास्कराचार्यांचे ग्रंथ अभ्यासण्यासाठीं, चाळीसगांवपासून सुमारें १६ कि. मी. असलेल्या, पाटण या गांवीं एक मठ बांधला. सिंघण राजा शके ११३२ ते ११५९ (सन १२१०–१२३७) या कालांत देवगिरीवर राज्य करीत होता. त्याच वेळीं खानदेशांत सिंघणाचा मांडलिक निकुंभ वंशांतला सोन्हदेव (सूर्यदेव) हा राज्य करीत होता. सिंघणाच्या सांगण्यावरून, त्यानें व त्याचा भाऊ हेमाडी (हेमाद्री) यांनीं, मठासाठीं कांहीं नेमणुका करून दिल्या. या सर्वांचें वर्णन पाटण येथल्या देवीच्या देवळांत जो शिलालेख कोरलेला आहे त्यांत दिलेलें आहे. चाळीसगांवच्या उत्तरेस गिरणा नदीच्या कांठीं बहाळ म्हणून गांव आहे. तेथल्या देवीच्या देवळांत असाच, म्हणजे याच मजकुराचा, शिलालेख कोरलेला आहे. डॉ. भाऊ दाजी म्हणतात त्याप्रमाणें हीं गांवें सह्याद्रि पर्वताच्या जवळ अशा डोंगरांच्या रांगेंत आहेत कीं त्यांत पितळखोऱ्याची लेणीं येतात. वरील देवळांत जे शिलालेख आहेत त्याचाच तर्जुमा घोलप यांचेकडील ताम्रपटांत आहे. रॉयल एशियाटिक सोसायटीच्या नियतकालिकाच्या पृष्ठें १७८ ते १८३ यात वार्टकिन्सच्या श्रेणींत, ताम्रपटदानें ९ व १०, यांत या ताम्रपटाची माहिती आढळते. पण ताम्रपटांतील मजकूर शिलालेखांतील मजकुराहून वेगळा नाहीं. त्यांत राजा सोनदेव यानें चंगदेवास शके ११२८ त (सन १२०६) जें दानपत्र दिलें तें कोरलेलें आहे. पाटणचा लेख चंगदेवानें कोरवून घेतला आहे तर बहाळचा शिलालेख अनंतदेवानें कोरवून घेतला

आहे. हे दोघेही जण भास्कराचार्यांचे नातू असावेत. शिलालेखांत व ताम्रपटांत मजकुराचे दोन भाग आहेत. त्यांतला संस्कृतांतला श्लोकबद्ध भाग भास्कराचार्यांच्या कुलवर्णनात्मक असून, जें दानपत्र सोनदेवानें केलें तें, त्या काळच्या खानदेशी मराठींत म्हणजे, अहिरी भाषेंत लिहिलेलें आहे. ताम्रपटाचा काळ शके ११२८ व ज्ञानेश्वरीचा काळ शके १२१२ यांचा विचार करतां ज्ञानेश्वरांच्या अगोदर १०० वर्षें गद्य मराठी किंवा अहिरी कसें होतें यावर प्रकाश पाडण्यास हा ताम्रपट उपयोगीं पडूं शकेल.

ताम्रपटाची नक्कल

उद्‌भटबुद्धिर्भाट्टे सांख्ये संख्यः स्वतंत्रधीस्तंत्रे ।
वेदे ऽनवद्यविद्यो ऽनल्पः शिल्पादिषु कलासु ।।१।।

स्वच्छन्दो ऽथ च्छन्दसि शास्त्रे वैशेषिके विशेषज्ञः ।
यः श्रीप्रभाकरसमः प्रभाकरसुदर्शने कविः काव्ये ।।२।।

बहुगुणगणितप्रभृतिस्कंधत्रितये त्रिनेत्रसमः ।
विबुधाभिवन्दितपदो जयति श्रीभास्कराचार्यः ।।३।।

श्रीमद्यदुवंशाय स्वस्त्यस्तु समस्तवस्तुसहिताय ।
विश्वं यत्र त्रातुं जातो विष्णुः स्वतंत्रस्तु ।।४।।

गर्जद्‌गुर्जरकुंजरोत्कटघटासंघट्टकण्ठीरवो ।
लाटोरस्ककपाटपाटनपटुः कर्णाटहृत्कंटको ।।
श्रीमान्भिल्लमभूपतिः समभवद्‌भूपालचूडामणिः ।
त्रस्तातान्ध्रपुरन्ध्रिकान्तसुखहृच्छ्रीजैत्रपालो ऽभवत् ।।५।।

लक्ष्मीकांतभवः प्रतारितभवः श्रीजैत्रपालोद्‌भवः ।
संग्रामांगण संचितातिविभवः शास्ता भुवः सिंघणः ।।
पृथ्वीशो मथुराधिपो रणमुखे काशीपतिः पातितो ।
येनासावपि यस्य भृत्यबटुना हम्मीरवीरो जितः ।।६।।

अवततार पुरा पुरुषोत्तमो । यदुकुले जगतीहितहेतवे ।।
जयति सो ऽयमिमां सकलामिम् । अवतिमामपि सिद्धमहीपतिः ।।७।।

शांडिल्यवंशे कविचक्रवर्ती । त्रिविक्रमो ऽभूत्तनयो ऽस्य जातः ।।
यो भोजराजेन कृताभिधानो । विद्यापतिर्भास्कर भट्टनामा ।।८।।

तस्माद्‌गोविंदसर्वज्ञो । जातो गोविंदसन्निभः ।।
प्रभाकरः सुतस्तमात् प्रभाकर इवापरः ।।९।।

तस्मान्मनोरथो जातः । सतां पूर्णमनोरथः ।।
श्रीमान्महेश्वराचार्यः । ततोऽजनि कवीश्वरः ।।१०।।

तत्सूनुः कविवृन्दवंदितपदः सद्वेदविद्यालता- ।
कंदः कंसरिपुप्रसादितपदः सर्वज्ञविप्रासदः ।।
यच्छिष्यैः सह कोऽपि नो विवदितुं दक्षो विवादी क्वचित् ।
श्रीमान् भास्करकोविदः समभवत्सत्कीर्तिपुण्यान्वितः ।।११।।

लक्ष्मीधराख्योऽखिलसूरिमुख्यो । वेदार्थवित्तार्किकचक्रवर्ती ।।
क्रतुक्रियाकांडविचारसारो । विशारदो भास्करनंदनोऽभूत् ।।१२।।

सर्वशास्त्रार्थदक्षोऽयमिति मत्वा पुरादतः ।
जैत्रपालेन यो नीतः कृतश्च विबुधाग्रणीः ।। १३ ।।

तस्मात्सुतः सिंघणचक्रवर्ती । दैवज्ञवर्योऽजनि चंगदेवः ।।
श्रीभास्कराचार्यनिबद्धशास्त्र- । विस्तारहेतोः कुरुते मठं यः ।।१४।।

भास्कररचितग्रंथाः सिद्धांतशिरोमणिप्रमुखाः ।
तद्वंश्यकृताश्चान्ये व्याख्येया मन्मठे नियतम् ।।१५।।

श्रीसोह्नदेवेन मठाय दत्तं । हेमाद्रिना किंचिदिहापरैश्च ।
भूम्यादिसर्वं परिपालनीयं । भविष्यभूपैर्बहुपुण्यवृद्ध्यै ।।१६।।

दानपत्र (अहिरी भाषेंत)

स्वस्ति श्रीशके ११२८ प्रभवनाम संवत्सरे श्रीश्रावणे मासे पौर्णमास्यां तिथौ चंद्रग्रहणसमये श्रीसोन्हदेवेन सर्वजनसंनिधौ हस्तोदकपूर्वकं निजगुरुरचितमठायाग्रस्थानं दत्तं तद्यथा ।

इयां पाटणीं जे कणे उघटे तेहाचा जो सिंदू जो राऊला होता ग्रोहकापासो तो मठा दिन्हला. ब्राह्मणा जे दिकहे ब्रह्मोत्तरतं ब्राह्मणी दिन्हले. ग्राहकापासीं दाम्हाचा वीसोवा असुपाठी गिधव ग्राहकापासी पंच पोफापासि ग्राहकापासी, पहिवहिले आघणे आदाणा चीलो मठा दिन्हला. जेतिघाणे वाहति तेतियां प्रति पलिपलीतला जेम विजेचे मंठीचे नमाय नवावे. मापा उगठा अर्धअर्ध मापाचे हारिभूपाचे स्तूक तथा भूमिः चतुराघाट-विशुद्धा ३०६ ग्रामवाले कामतामध्य तथा कलपंडिताकालतु मीचउरा धामोजीची सोढीया ।।

दानपत्राचा मराठींत तर्जुमा

या पाटण गांवांत जे घाऊक व्यापारी आहेत त्यांची जी ठेव होती ती त्यांनीं मठाला दान दिली. गांवांतल्या ब्राह्मणांस ब्रह्मोत्तर नांवाची जी मिळकत गांवकऱ्याकडून मिळत असे ती त्यांनीं मठास अर्पण केली आहे. गांवांत विकल्या जाणाऱ्या तुपावर एक 'असु' नांवाचा कर घेतला जात असे. त्याचा विसावा हिस्सा मठाकडे जाईल. गांवांत तेली लोकांचे जे घाणे चालतात त्यांतल्या पहिल्या घाण्यापोटीं एक लोटी तेल तेल्यांनीं मठास द्यावें. व पुढील प्रत्येक घाण्यामागें एक पळी तेल मठास द्यावें. या तेलाचें माप मठाच्या भांड्यांनीं व्हावें. मठासाठीं जमीन चोहोंबाजूंनीं मोजून दिली आहे. एके बाजूस कामतांची जमीन, एके बाजूस पंडितांची चराऊ जमीन, व एके बाजूस धामोजीची (दामाजी) टेकडी आहे.

वरील ताम्रपटाचें संस्कृत चंगदेवाचें असून तो भास्कराचार्याइतकाच विख्यात संस्कृतज्ञ व गणिती होता. अर्थात् या ताम्रपटावरून व शिलालेखांवरून हें स्पष्ट दिसतें कीं भास्कराचार्याचा मुलगा व नातू हे राजा जैत्रपाल व सिंघण यांच्या पदरीं आश्रित असून त्यांच्या मठांना म्हणजेच विद्यालयांना सरकारी अनुदान व खाजगी देणग्याही भरपूर मिळत होत्या.

काही पारिभाषिक शब्द आणि शब्दसूचि

सूचना :— ज्या शब्दांच्या पाटीमागें फुलीचें चिन्ह * आहे ते लेखककृत आहेत असें समजावें.

शुद्धिपत्रक

पृष्ठ	ओळ, श्लोक	अशुद्ध	शुद्ध
४	खालून २ री	तोलन	तोलून
५	ओळ १५	विभागात	विभागास
९	खालून ५ वी	अंक:	अंका:
११	तळटीप	परिशिष्ट ५	परिशिष्ट ४
१३	खालून १० वी	४ ॅ ७	४ नें ७
१६	श्लोक २३	बुद्धेविवृद्धि	बुद्धेर्विवृद्धि
१९	ओळ ४	घने ऽ सि	घने ऽ स्ति
२०	श्लोक २९	अन्त्य निघ्नीं	अन्त्यनिघ्नीं
२०	खालून ७	विभागातमधलेले	विभागामधले
२१	पहिली	१९६८३ च	१९६८३ चे
२५	श्लोक ३६	स्वकीगै:	स्वकीयै:
२८	ओळ ११	मळ	मूळ
३१	ओळ १०	$\genfrac{}{}{0pt}{}{२}{५}$	$\frac{२}{५}$
३१	श्लोक ४८	द्रयं	द्वयं
३२	ओळ ८	$\genfrac{}{}{0pt}{}{३}{४}$	$\frac{३}{४}$
३८	ओळ १	ययार्योग:	ययोर्योग:
३९	श्लोक ६१	व्यका	व्येका
४७	श्लोक ७२	लुब्ध	लुब्धं
५१	श्लोक ८१	स्त्री	स्त्री:
५५	श्लोक ८५	रूपैरुत्कपट्ट	रूपैरुत्कटपट्ट
६७	ओळ ८, ९, १०	२ ऱ्या, ३ ऱ्या, ४ थ्या	२ ऱ्या जवळ ३ ऱ्या जवळ ४ थ्या जवळ
७१	खालून १ ली	$य = य_१ + य_१$ हे $क्ष_१ - क्ष_२$	$य = य_१ + य_२$ हे $क्ष_१ - क्ष_२$
७४	खालून ८	$२^{न} - १$	$२^{न}$
८०	ओळ ४	तदु ॰ म्	तदुक्तम्

८५	ओळ ४	लं	फलं
८५	७	पट (common ratio)	(common ratio)
८६	श्लोक १२६	निष्कान	निष्कान्
९१	खालून ३	$\frac{१८३८२}{४००}$	$\frac{१८३८\cdot२}{४००}$
		$\frac{३६७२४}{८००}$	$\frac{३६७६\cdot२}{८००}$
९२	श्लोक १३७	ऽ धिता	ऽ र्धिता
९३	खालून ७	= ·६	= १६
१००	श्लोक १४९	स्याद्ययतोम्भो	स्यात् यतोम्भो
१२०	१५	कक	एकक
१२७	खालून ५	यमै	यमैः
१४९	श्लोक २११	धनफलं	घनफलं
१५०	खालून २	$२^{१}$	$\frac{१}{२}$
१५१	ओळ ७	$\sqrt{पफ + \sqrt{प'फ'}}$	$\sqrt{पफ} + \sqrt{प'फ'}$
१५३	ओळ ३	आयाता	आयता
१६७	ओळ ३	ऽ स्म दादि	ऽ स्मदादि
१७७	ओळ ६	गुणधम	गुणधर्म
१८०	भाग ४ ओळ १	अक्षबय	अक्ष — बय
१६७	२७	श्लोक २३४	श्लोक २३४ अ
१८३	शेवटची	— १	न — १
१८३	खालून ५ वी	अनुक्र दला	अनुक्रम दिला
१९५	खालून ८ वी	१	— १
१९६	१ ली	वजत	वर्जित
१९७	खालून ११	उठन	उठून
१९९	खालून ४	वार्ठकिन्स	वॉटकिन्स
२०३	श्रोळ २ कॉलम ३	अभिष्ट	अभीष्ट
२०३	ओळ ५ कॉलम ३	Radial	Radian
२०८	ओळ ९ कॉलम १	प्र ेप	प्रक्षेप

' टिपणे '

‘ टिपणे ’